多様体の基礎

芝浦工業大学　数理科学研究会
大島直樹

平成 29 年 11 月 3 日

研究背景

以前より興味のあった幾何学の一分野である多様体論について研究しようと考えた. 進めるにあたり, 線形代数, 微分積分, 集合と位相, 群論などの初歩的な知識が必要となる. しかし, 土台となる知識が足りないことを強く実感した. そこで, 前半は多様体を学習するために必要な基礎知識を, 後半は多様体の基礎について講義形式でまとめた.

1　多様体とは

平面に対しては原点 O を決定すれば, 直交座標系 (x, y) や, 極座標系 (r, θ) などを描くことでき, 平面上の勝手な点 p は, $(2, 7)$ や $(4, \frac{\pi}{3})$ などの 1 対 1 対応した座標が得られる. 次に球面を考える. 球面には直交座標系を描くことは出来ないが, 球面の限られた領域ならば, 曲線座標系を描くことが出来る. 球面などの空間の限られた範囲に描かれた座標系を局所座標系という. 平面や曲面から一般次元に拡張した空間を考え, どこでも好きな場所に局所座標系が描ける様な空間を**多様体**という.

2　位相

距離空間で定義した X を空でない集合, $\mathfrak{O}$ を X の部分集合系とする.

(1) $X, \varnothing \in \mathfrak{O}$

(2) $O_1, O_2 \in \mathfrak{O} \to O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$

(3) $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$

$\mathfrak{O}$ が上記の 3 つの条件を満たすとき, $\mathfrak{O}$ を X の位相, 組 $(X, \mathfrak{O})$ を**位相空間**という.

位相空間 $(X_1, \mathfrak{O}_1), (X_2, \mathfrak{O}_2)$ に対して, 全単射な連続写像 $f : X_1 \to X_2$ が存在し, 逆写像 f^{-1} も連続なとき, f を**同相写像**という. 同相写像 $f : X_1 \to X_2$ が存在するとき,X_1, X_2 は**同相**である, または**位相同型**であるという.

X を位相空間とする. X の異なる 2 点を開集合で分離することをができるとき, つまり, 任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対して, X の開集合 U, V が存在し,

$$x \in U, \quad y \in V, \quad U \cap V = \varnothing$$

を満たすとき, X を**ハウスドルフ空間**という.

3　位相多様体

M をハウスドルフ空間とする. M の任意の点が $\mathbb{R}^n$ の開集合と同相な近傍を持つとき, すなわち, 任意の点 $p \in M$ に対して, p を含む開集合 $U, U' \subset \mathbb{R}^n$, 同相写像$\varphi : U \to U'$ が存在するとき, を**位相多様体**という.

組 (U, φ) を M の座標近傍, φ を U 上の**局所座標系**という. φ を関数 $x_1, x_2, \cdots, x_n : U \to \mathbb{R}$ を用いて, $\varphi = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と表しておくとき, $p \in U$ に対して, $(x_1(p), x_2(p), \cdots, x_n(p))$ を p の**局所座標**という.

4　C^r 級可微分多様体

M を位相多様体とする. 位相多様体の定義より, M の座標近傍からなる集合族 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ が存在し,

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

と表すことができる. $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ を M の**座標近傍系**という.

$(U, \varphi), (V, \psi)$ を M の座標近傍とし, $U \cap V \neq \varnothing$ であると仮定する. このとき, φ の $U \cap V$ への制限は同相写像 $\varphi\ |_{U\cap V}$: $U \cap V \to \varphi(U \cap V)$ を定める. 同様に ψ の $U \cap V$ への制限は同相写像 $\psi\ |_{U\cap V}$: $U \cap V \to \psi(U \cap V)$ を定める. このとき, φ^{-1} と ψ の合成写像は

$$\psi\ |_{U\cap V} \circ \varphi^{-1}\ |_{U\cap V} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

と定め, (U, φ) から (V, ψ) への**座標変換**という.

M を $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ を M の座標近傍系とし, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ となる任意の $\alpha, \beta \in A$ に対して座標変換:

$$\varphi_\beta \mid U_\alpha \cap U_\beta \circ \varphi_\alpha \mid U_\alpha \cap U_\beta^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

ψ が C^r 級のとき, 組 (M, S) または, M を $\mathbf{C^r}$ **級微分可能多様体**といい, S を $\mathbf{C^r}$ **級座標近傍系**という.

今後の課題

今回扱った多様体論は, 実数での範囲で定義し, 多様体も具体的で理解しやすい. そこで今後は, 複素数の領域も含まれる複素多様体論を研究していきたい.

参考文献

[1] 藤岡敦:具体例から学ぶ多様体, 2017, 裳華房.

[2] 松本幸夫:多様体の基礎, 2017, 東京大学出版会.