音楽と数学 改

芝浦工業大学　数理科学研究会

富岡大貴

平成 29 年 11 月 3 日

研究背景

昨年も音楽と数学の関係について研究したが, 自分の研究不足で中途半端にしか研究することが出来なかった. だからもう一度,1 から研究し直そうと思いこのテーマにした.

1　音楽と数学の関係

音楽では音階も, リズムも, テンポも, また楽器の指使いですらも数字で表される. 音階をド, レ, ミ,$\cdots$ で表したとしてもこれも数字の一種である. 数字で書かれていると言うことはそこに数があると言うことである.

2　音律と数列

数は音の高さにも隠れている. 定まったピッチは固有の振動数をもち,1 秒間の振動数で記される. 音階は音の高さの並びである. これは数の並び, つまり数列である. 歴史上様々な数列と関係する音律があるが, 今回は平均律, ピタゴラス音律, 純正律について考えていく.

2.1　平均律と等比数列

ピアノの音での 1 オクターブは低音でも高音でも音の高さの感覚は同じである. しかし振動数は 2 の n 乗倍で増えていく. このように感覚的刺激は足し算なのに実測的にはかけ算になっている関係をウェーバー・フェヒナーの法則といい次のような公式になっている.

$$R = k \log \frac{S}{S_0}$$

R : 感覚の強さ, S : 刺激の強さ, S_0 : 感覚の強さが 0 になる刺激の強さ, k : 刺激の固有定数

これは 1 オクターブの中でも続いている. 平均律は 1 オクターブを 12 の等比的に均等な音程に分割する. 元の音を 1 とし,1 オクターブ上の音を 2 とすると 12 回かけて 2 になるので半音は $2^{\frac{1}{12}}$ となる. このことから平均律による 12 半音階は

$$K_n = 1, 2^{\frac{1}{12}}, 2^{\frac{2}{12}}, 2^{\frac{3}{12}} \cdots, 2$$

という数列 K_n が成り立つ. この関係から平均律による元になる音 P(Hz) から n 番目の音の振動数 R(Hz) は次の式で表される.

$$R = P \times 2^{\frac{n-1}{12}} (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

2.2　ピタゴラス音律と等比数列

Pythagoras たちの発見した協和する音程比は 1:2 と 2:3 と 3:4 であり,1:2 はオクターブの関係にあるので同じ音である. 違う音で最も協和しているのは 2:3 の関係である. これは完全 5 度の関係で音で言う「ド-ソ」にあたる. この音程関係を使って作られたのがピタゴラス音律である. そこから協和する完全 5 度を積み上げて等比数列を作った. 音階内の高さ R_nは 5 度を n 回積み上げるとして

$$R_n = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{2^P}$$

という式が成り立つ.

2.3　純正律と等差数列

最も純正に協和されるためには純正律が必要になる. これを音楽理論家の Gioseffo Zarlino はミの音を $\frac{5}{4}, \frac{6}{5}$ でとりそれを元に純正律を作った. 純正律はは単純な整数の比から成り立つ等差数列である. そのハーモニーは濁りのない美しい響きになる. 以上のことを比べた結果, メロディーではピタゴラス音律-平均律-純正律, 主要和音の響きでは純正律-平均律-ピタゴラス音律, 転調のバランスでは平均律-ピタゴラス音律-純正律となっていることがわかった.

今後の課題

昨年は波を使って研究し今年は数列を使って研究した. 今度は物理と数学を合わせて研究してみたい. 音楽では群を使うものもあるから, それについても調べてみたいと思った.

参考文献

[1] 音楽と数学の交差, 桜井進, 坂口博樹, 大月書店, 2011 年.