素数定理の複素解析での証明

芝浦工業大学　数理科学研究会
辻村将吾

2017 年 11 月 3 日

研究背景

私は, 「素数定理」に興味があり, その定理を証明しようと考えた. そして, 私自身解析学の分野にを勉強していくにあたりベクトル解析や複素解析に興味をもったことから. これらのことを考えた上でこのテーマに決定した.

1　素数定理

素数定理とは自然数 x を超えない素数の個数を $\pi(x)$ で表すと,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\log x}}=1$$

が成り立つような定理である. つまり, 素数の個数 $\pi(x)$ は $\dfrac{x}{\log x}$ という関数によって近似できることが可能であることを示している. これらの具体例を出してみると 表のような結果を得る.

x	$\pi(x)$	$\log x$	$\dfrac{\pi(x)\log x}{x}$
10	4	2.30258	0.92103
100	25	4.60517	1.15129
1000	168	6.90775	1.16050
10000	1229	9.21034	1.13195

2　証明の概要

以下, p を素数を表すものとする. 以下の 3 つの関数の性質を調べ証明をする.

1. $\zeta(s)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$
2. $\Phi(s)=\displaystyle\sum_{p}\frac{\log p}{p^s}$
3. $\theta(x)=\displaystyle\sum_{p\leqq x}\log p \qquad (s\in\mathbb{C}, x\in\mathbb{R})$

これらの関数は ζ はリーマンのゼータ関数, Φ は素数全体にわたる和, θ は x 以下の素数全体にわたる和を表している. それぞれ解析接続を行うことによって複素関数においてリーマンのゼータ関数は Re(s) >1 の範囲では正則であることなどの性質を利用することで証明を行う. また, 「**留数定理**」を用いることによって素数定理を証明できる. 留数定理は「Re(s)$\geqq 1$, $s\neq 1$ に対し, $\zeta(s)\neq 0$ であるとき $\Phi(s)$-$\dfrac{1}{s-1}$ は Re(s)$\geqq 1$ に正則関数として拡張できる.」というものを証明するに当たって用いられるものである.

2.1　留数定理

穴あき円板 $\Delta*(z_0,R)$ における正則関数 $f(z)$ の $z=z_0$ における Laurent 展開を

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

とする. このとき -1 次の係数

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}f(z)dz \qquad (0<r<R)$$

を $f(z)$ の $z=z_0$ における **留数** と呼ぶ. (円板の円周は反時計回りの向きが入っているものとする) このとき以下のような定理があることが知られている.

[**留数定理**] 区分的に滑らかな境界をもつ領域 D と D 内の孤立特異点を除いて D の閉包を含む領域で正則な関数 $f(z)$ を考える. さらに $f(z)$ は ∂D 上には除去可能特異点以外の孤立特異点を持たないと仮定する. このとき

$$\int_{\partial D}f(z)\,dz=2\pi i\sum_{z\in D}\mathrm{Res}(f,z)$$

が成立する. ただし, $f(z)$ が $z=z_0$ で正則であるときは $\mathrm{Res}(f,z_0)=0$ であると約束する.

今後の課題

今後は, この定理だけではなく複素関数を用いることによって証明, 計算できるような積分などを調べていってあらゆる方面から数学を見ていきたいと思う. また, この素数定理をこの方面からではなく代数的な方面から証明をしていくことも検討していきたいと思っている.

参考文献

[1] 複素解析の神秘性, 吉田信夫, 現代数学社, 2011 年.

[2] 複素解析, 宮地秀樹, 日本評論社, 2015 年.