ツォルンの補題

芝浦工業大学　数理科学研究会
BV17077　横井　健

平成 29 年 11 月 3 日

研究動機

先輩方の話から集合論について気になり学ぶことにした．勉強を通して選択公理やツォルンの補題というものがあることを知った．そこで今回気になっていた選択公理やツォルンの補題について学習したので発表することにした．

1　準備

Γ は空でない集合とする．集合 M の部分集合の集合 $\mathfrak{P}(M)$[1] を考える．Γ から $\mathfrak{P}(M)$ への写像:$\Gamma \ni \gamma \mapsto A_\gamma \in \mathfrak{P}(M)$ が与えられたとき, Γ を添数とする集合族 $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ が与えられたという．集合族 $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ に対しても, 和集合, 直和, 共通部分を定義することができる．

和集合:$\cup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \mid \text{ある}\gamma \in \Gamma\text{に対して } x \in A_\gamma\}$

直和:$\sqcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \cup_{x\in A,\gamma\in\Gamma}(x, A_\gamma)$

共通部分:$\cap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \mid \text{すべての}\gamma \in \Gamma\text{に対して } x \in A_\gamma\}$

$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ を集合族とし, また $A_\gamma \neq \emptyset(\gamma \in \Gamma)$ とする．このとき Γ から直和 $\sqcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ への写像 $\gamma \to x_\gamma$ で $x_\gamma \in A_\gamma$ となっているものの全体の集合を $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ で表わし, $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ の直積集合という．

また, $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{(\cdots, x_\gamma, \cdots) \mid x_\gamma \in A_\gamma(\gamma \in \Gamma)\}$ で表わせられる．

2　選択公理

集合系[2]$(A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma)$ において, どの $\gamma \in \Gamma$ に対しても $A_\gamma \neq \emptyset$ となるならば $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \neq \emptyset$ となる．という命題のことを**選択公理**という．

つまり, (無限集合も含めた) 一般の集合 Γ に対して, $x_\gamma \in A_\gamma$ を抽出してくることができることを保証したものが選択公理である．例えば, 集合系 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ から元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を選ぶび出すことは有限回の思考なので出来るが, 無限集合を添字集合とするような集合系 $A_1, A_2, \cdots$ から元 $x_1, x_2, \cdots$ を選び出すという操作は約束事とせざるを得ない．それを保証するのが選択公理である．

[1]集合 M の部分集合全体はまた 1 つの集合をつくり, これを M のべき集合といい, $\mathfrak{P}(M)$ で表す．

[2]空でない集合 Γ からある集合族への写像 A のことを, Γ の上の集合系といい, $(A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma)$ あるいは $(A_\gamma)\gamma \in \Gamma$ で表わす．Γ のことを集合系 $(A_\gamma)\gamma \in \Gamma$ の添字集合という．

3　ツォルンの補題

定理． 次の命題はすべて同値である．

(A) $\Gamma \neq \emptyset, A_\gamma \neq \emptyset(\gamma \in \Gamma)$ のつくる集合族 $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ には必ず選択関数[3]が存在する．

(B) 帰納的順序集合[4]には少なくとも 1 つの極大元[4]が存在する．

(C) どんな集合 $(\neq \emptyset)$ をとっても, 適当に順序を導入することにより, この順序に関し整列集合[4]とすることができる．

(D) 集合 $M(= \emptyset)$ に有限性の性質[4]が与えられとする．このとき M の部分集合で性質をみたす極大なものが存在する．

(E) どんな順序集合[4]に対しても, 極大な全順序部分集合[4]が存在する．

引用するときは (A) を選択公理, (B) を帰納集合定理, (C) を整列可能定理という．

1930 年代にツォルンが上の 5 つの命題がすべて同値なことを述べて, それ以来, 上の定理を一括して**ツォルンの補題**とよぶことになった．

今後の課題

今回はツォルンの補題の同値関係の証明だけで終わってしまったが, 初歩的な部分で選択公理が関係する命題は多くあるので, さらに理解を深め今後の学習に生かせるようにしていきたい．

参考文献

[1] 田中 尚夫 著, 選択公理と数学 遊星社, 星雲社, 2005 年.

[2] 志賀 浩二 著, 集合位相測度 朝倉書店, 2006 年.

[3] 庄田 敏宏 著, 集合位相に親しむ 現代数学社, 2010 年.

[3]Γ を空でない集合とし, $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ を, Γ を添数とする集合属とする．各 γ に対し $A_\gamma \neq \emptyset$ とする．このとき Γ から $\sqcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ への写像 φ で, $\varphi(\gamma) \in A_\gamma$ を満たすものを, 集合族 $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ の**選択関数**または**選出関数**という．よって各 A_γ から 1 つの元 $\varphi(\gamma)$ を A_γ の (φ によって選出された) **代表元**という．

[4]資料参考されたし