駅の改札の混雑解消法の検討

BV16059　西村健志

平成30年5月20日

※計算ミスや誤字等がありましたら加筆修正しますのでご指摘をお願いいたします.

目 次

研究背景

昨年の芝浦祭で, 待ち行列の理論を使って自宅の最寄駅の改札について研究した. その結果, 一方の改札に利用者が集中した. 今回は改札を増やすべきか, または何らかの方法で 1 つの改札への集中を改善すべきかを研究をすることにした.

1 待ち行列について

1.1 待ち行列とは何か

私たちの日常生活の中で行列に並んで待つことは極めて多い. 銀行, 郵便局, 駅, 食堂などで行列を作って順番を待ち, サービスを受けて退場するという現象は数多く存在する. このときにできる行列は全て**待ち行列**である. このような待たせることが生じる原因は, 各種のサービス設備の数がサービスを必要とする人あるいは物の数に比べて不足しているからである. しかし, むやみにサービス設備の数を増やすのは, 不経済を招くことにつながる. そこで, サービスを受ける人あるいは物と, サービス設備の間に最適の数量的関係を見出そうという考えから出発したのが**待ち行列理論**である.

1.2 待ち行列に必要な要素

- **客** : サービスを受けるために到着する人, 物, 情報.
- **到着の仕方** : 定間隔到着 or ランダム到着.
  定間隔到着の場合は, 到着が予想されるので対策もとりやすく, 待ち行列理論の対象にするまでもない. ランダム到着はやっかいであるが, その到着の仕方を確率分布で表すと, 待ち行列理論の対象の典型となる. さらに, ランダムということをつきつめると, その到着状況はポアソン分布に従う. また, 到着間隔に注目すれば指数分布に従っていることも分かる.
- **平均到着率** λ : 単位時間あたりに到着するお客さんの人数.
- **窓口の数**
- **窓口のサービスの質** : 複数の窓口がある場合, 窓口によって行われるサービスが異なることもある.
- **平均サービス率** μ : 単位時間に何人サービスするか.
  μ の逆数 $(\frac{1}{\mu})$ は平均サービス時間を表す.
- **サービスの順番** : 通常は先着順とする.
- **待合室の大きさ** : 町の個人病院などでは, 待合室が小さいのでそこが満員になると, 後から来たお客さんがあきらめて帰ってしまうことがあるので, 待合室の大きさは重要である. しかし, 今回のモデルでは使用しない.

1.3 ケンドール記号

待ち行列のモデルを作るには, 1.2 で挙げたようにいろいろな要素を考える必要がある. そこで, そのモデルがどんなモデルであるのかを簡単に表すためにケンドール記号という記号を用いて次のように表す.

$$\boxed{\text{到着/サービス/窓口数 (系の大きさ)}}$$

到着とサービスは次の記号で表す.

$$\begin{cases} M : \text{ポアソン分布または指数分布に従う} \\ D : \text{一定分布に従う} \\ Ek : \text{アーラン分布に従う} \\ G : \text{一般分布に従う} \end{cases}$$

系の大きさ：待ち行列に並んでいる人数と, サービス中の人数の合計.

1.4　確率変数と確率分布

1.3 で挙げた 5 つの確率分布 (ポアソン分布など) がどのようなものなのかを簡単に紹介する.

定義 1.1（確率変数, 確率分布）

1. 事象に対して定まる変数 (X) で, その事象が起こる確率 $(P(X))$ が定まっているもの (X のこと) を**確率変数**という.
2. 確率変数を定める法則 (規則) を**確率分布** (または単に分布) という.

定義 1.2（離散型確率変数, 確率質量関数）　サイコロ投げやコイン投げのように確率変数 X が離散の値をとるとき, **離散型確率変数**という. 離散型確率変数 X が $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の値をとるときに, 特に

$$P(X = x_i) = p_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$$

を**確率質量関数** (確率関数, 質量関数ともいう) という.

定義 1.3（連続型確率変数, 確率密度関数）　分布関数 $F(x) = P(X \leq x)$ が, ある非負関数 f により

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

と書けるとき, X を連続型確率変数, f を X の確率密度関数 (または単に**密度関数**) という.

- ポアソン分布
  λ を正の整数とする. 確率変数 X の確率質量関数が
  $$p_r = P(X = r) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^r}{r!},\ r = 0, 1, 2, \cdots,$$
  であるとき, X はパラメータ λ の**ポアソン分布**に従うといい, $X \sim P_0(\lambda)$ と書く.

- 指数分布
  正の定数 λ に対して, 確率変数 X の密度関数が
  $$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0,\ f(x) = 0,\ x < 0,$$
  であるとき, X はパラメータ λ の**指数分布**に従うといい, $X \sim \exp(\lambda)$ と書く.

- 一定分布
  常に一定の値となる分布を**一定分布**という.

- アーラン分布
  密度関数が次の形：
  $$f_k(x) = \frac{(k\lambda)^k}{(k-1)!} \cdot x^{k-1} \cdot e^{-k\lambda x}$$
  を持つとき, その分布を**アーラン分布**という. 但し, k は位相.

- 一般分布
  その分布の平均値と分散が分かっていれば, 待ち行列の長さが計算できる. 分布の形が分かる必要はない.

1.5 求めるべき解

次の 4 つの解を求めることを目標とする.

待たされる確率 (Pq), 系内にいる平均客数 (L), 待ち行列の平均の長さ (Lq), 平均待ち時間 (Wq)

1.6 $M/M/1$ モデルの解の公式

$\frac{\lambda}{\mu} = \rho$(窓口利用率という) とおく.
1. 待たされる確率　$Pq = \rho$
2. 系内にいる平均客数　$L = \dfrac{\rho}{1-\rho}$
3. 待ち行列の平均の長さ　$Lq = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$
4. 平均待ち時間　$Wq = \dfrac{\rho}{\mu(1-\rho)}$

証明は昨年の芝浦祭の時に作成した資料にあるので, ここでは省略する.

1.7 $M/M/s$ モデルについて

1.7.1 $M/M/s$ モデルと $M/M/1$ モデルの違い

ここでは, 窓口が複数個 (s 個とする) ある場合を考える. 基本的な考え方は, $M/M/1$ モデルと同じだが, 次の点が異なる.

- 窓口 1 つの平均サービス率を μ とする. この窓口が s 個あるので, 系全体の平均サービス率は $s\mu$ となる. 従って, 窓口利用率 ρ は, $\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$ となる.
- 系内の人数が n 人から $(n-1)$ 人に変わるのが, $M/M/1$ モデルではサービスの完了する割合 (μ) だったが, $M/M/s$ モデルでは次のようになる.
    1. $n \leq s$ のとき
       全員がサービスを受けることができるので, $n\mu$ の割合となる.
    2. $n \geq s$ のとき
       窓口の数だけの人数がサービスを受けられるので, $s\mu$ の割合となる.

1.7.2 系内に n 人 (n は 0 以上の整数) いる確率 (P_n)

ある時点 t を出発点とする.
t からわずかな時間 Δt(ただし, $\Delta t \neq 0$) を経過した後, つまり, 時点 $t + \Delta t$ でどんなことが起こり得るかを考える. ただし, Δt は十分に小さな時間であるから, この間にお客さんが 2 人来ることや, サービスが 2 人以上完了すること, あるいは到着とサービス完了が同時に起こることはないとする. また, 時点 $t + \Delta t$ において, 系の中にお客さんが n 人いる確率を P_n と表すことにする. Δt は十分に小さな時間であるから, この間には,

(1) お客さんが 1 人来る

(2) お客さんが 1 人も来ない

のどちらかである. (1) の確率は $\lambda\Delta t$, (2) の確率は $1 - \lambda\Delta t$ である.

1. $n \leq s$ の場合
   P_0 と P_1 の関係は $M/M/1$ モデルと変わらないので,
$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \tag{1.1}$$
   となる.

   (a) お客さんが 1 人いる確率
   時点 $t + \Delta t$ にお客さんが 1 人いる確率 P_1 を考える. この場合は, 次の 3 通りが考えられる.
      i. 時点 t にお客さんが 1 人もいなくて (その確率は P_0) かつ到着が 1 人あった (その確率は $\lambda\Delta t$) 場合
      この確率は, $\lambda\Delta t P_0$.
      ii. 時点 t にお客さんが 1 人いて (その確率は P_1) かつ到着もサービス完了もなかった (その確率は $1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t$) 場合
      この確率は, $(1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t)P_1$.
      iii. 時点 t にお客さんが 2 人いて (その確率は P_2) かつサービス完了が 1 人あった (その確率は $2\mu\Delta t$) 場合
      この確率は, $2\mu\Delta t P_2$.

   この 3 つのいずれかが起こるので,
   $P_1 = \lambda\Delta t P_0 + (1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t)P_1 + 2\mu\Delta t P_2$
   $2\mu\Delta t P_2 = (\lambda + \mu)\Delta t P_1 - \lambda\Delta t P_0$
   $\Delta t \neq 0$ であるから, 両辺を Δt で割ると
$$2\mu P_2 = (\lambda + \mu)P_1 - \lambda P_0$$
   となる. ここに, 式 (1.1) を代入すると,
$$2\mu P_2 = (\lambda + \mu) \cdot \frac{\lambda}{\mu} P_0 - \lambda P_0 = \frac{\lambda^2 + \lambda\mu - \lambda\mu}{\mu} P_0 = \frac{\lambda^2}{\mu} P_0$$
   であるから,
$$P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0 \tag{1.2}$$
   となる.

   (b) お客さんが 2 人いる確率
   時点 $t + \Delta t$ にお客さんが 2 人いる確率 P_2 を考える. この場合は, 次の 3 通りが考えられる.
      i. 時点 t にお客さんが 1 人いて (その確率は P_1) かつ到着が 1 人あった (その確率は $\lambda\Delta t$) 場合
      この確率は, $\lambda\Delta t P_1$.
      ii. 時点 t にお客さんが 2 人いて (その確率は P_2) かつ到着もサービス完了もなかった (その確率は $1 - \lambda\Delta t - 2\mu\Delta t$) 場合
      この確率は, $(1 - \lambda\Delta t - 2\mu\Delta t)P_2$.
      iii. 時点 t にお客さんが 3 人いて (その確率は P_3) かつサービス完了が 1 人あった (その確率は $3\mu\Delta t$) 場合
      この確率は, $3\mu\Delta t P_3$.

   この 3 つのいずれかが起こるので,
   $P_2 = \lambda\Delta t P_1 + (1 - \lambda\Delta t - 2\mu\Delta t)P_2 + 3\mu\Delta t P_3$
   $3\mu\Delta t P_3 = (\lambda + 2\mu)\Delta t P_2 - \lambda\Delta t P_1$
   $\Delta t \neq 0$ であるから, 両辺を Δt で割ると
$$3\mu P_3 = (\lambda + 2\mu)P_2 - \lambda P_1$$

となる．ここに，式 (1.1)，式 (1.2) を代入すると，

$$3\mu P_3 = (\lambda + 2\mu) \cdot \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0 - \lambda \cdot \frac{\lambda}{\mu} P_0 = \frac{\lambda^3 + 2\mu\lambda^2 - 2\mu\lambda^2}{2\mu^2} P_0 = \frac{\lambda^3}{2\mu^2} P_0$$

であるから，

$$P_3 = \frac{\lambda^3}{3 \cdot 2\mu^3} P_0$$

となる．

(c) お客さんが n 人いる確率

最後に時点 $t + \Delta t$ にお客さんが n 人いる確率 P_n を考える．上の (a), (b) と同様に考えて計算できるが，今回は時間の都合上実際に導くことはできなかったので，結果のみ書くことにする．(a), (b) の結果から考えると下記のような答えになることが推測できると思う．

$$P_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\lambda^n}{\mu^n} P_0$$

2. $n \geq s$ の場合

今回は時間の都合上実際に導くことはできなかったが，結果のみ書くことにする．

$$P_n = \frac{s^s \rho^n}{s!} P_0$$

1.7.3 $M/M/s$ モデルの解の公式

1. 待たされる確率 $\quad Pq = \dfrac{\dfrac{\lambda^s}{\mu^s} P_0}{s!\left(1 - \dfrac{\lambda}{\mu s}\right)}$

2. 待ち行列の平均の長さ $\quad Lq = \dfrac{\lambda\mu\dfrac{\lambda^s}{\mu^s}}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} P_0$

3. 系内にいる平均客数 $\quad L = Lq + \dfrac{\lambda}{\mu}$

4. 平均待ち時間 $\quad Wq = \dfrac{\mu\dfrac{\lambda^s}{\mu^s}}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} P_0$

ただし，$P_0 = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\frac{\lambda^n}{\mu^n} + \frac{1}{s!}\frac{\lambda^s}{\mu^s}\frac{s\mu}{s\mu - \lambda}}$

2 具体的なモデル

2.1 前回の研究で分かったこと

便宜上私の家の最寄駅の改札について考えることにした．改札の配置は以下のようになっている．

売店	改札ア	改札イ	改札ウ	駅員室

図 1: 駅の改札の配置 (現在)

改札ア：退場 (↓) かつ IC カードのみ OK

改札イ：入退場 (↕)OK で，IC カード，切符どちらも OK

改札ウ：入場 (↑) のみ OK で，IC カード，切符どちらも OK

表 1: 8:30 と 8:31 の電車について

	1 番目に出た人の時間	最後に出た人の時間	2 分間で出た人の数
改札ア	8:34	8:36	46 人
改札イ	8:34	8:36	30 人

表 2: 8:43 と 8:45 の電車について

	1 番目に出た人の時間	最後に出た人の時間	5 分間で出た人の数
改札ア	8:46	8:51	47 人
改札イ	8:46	8:51	23 人

上の表は実際に行った調査 (2017/9/13(水) の 8:30〜8:45 に実施 (上り, 下り各 2 本ずつ)) より, 得たものである.

＜改札アについて＞

平均到着率 $\lambda = 16$ 人/分, 平均サービス率 $\mu = 20$ 人/分

$Pq = \rho = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} = 0.8$, $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = 4$

$Lq = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\frac{16}{25}}{\frac{1}{5}} = \frac{16}{5} = 3.2$, $Wq = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{\frac{4}{5}}{20 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$ =0.2 分=12 秒

＜改札イについて＞

平均到着率 $\lambda = 10$ 人/分, 平均サービス率 $\mu = 20$ 人/分

$Pq = \rho = \frac{10}{20} = 0.5$, $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

$Lq = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = 0.5$, $Wq = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{\frac{1}{2}}{20 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{20}$ =0.05 分=3 秒

2.2 退場者全体の人数と改札口が 2 つという条件から推測できること

改札アは改札イに比べて待たされる確率, 系内にいる平均客数, 待ち行列の平均の長さ, 平均待ち時間のいずれも大きな値になっている. ここで, 改札の数を増やせば改札アの待たされる確率, 系内にいる平均客数, 待ち行列の平均の長さ, 平均待ち時間が少しは減少すると推測できる. しかし, 改札の数を増やすにはお金が相当かかる. 本当に改札の数を増やす必要があるのか検討してみることにした. ただし, 考えやすくするため, 実際とは違うが次のように仮定する.

- 改札アと改札イの機能は同じであるとする. つまり, 切符の人も改札アを利用でき, また, 改札アから入場してくる人はいないと仮定する.

そうすると平均到着率 λ は $\lambda = 26$ 人/分, 平均サービス率 μ は $\mu = 20$ 人/分となり, 次のように計算できる.

$Pq = \frac{\frac{26^2}{20^2} \cdot \frac{7}{33}}{2!\left(1 - \frac{26}{40}\right)} = \frac{169}{330} = 0.5121\cdots$, $Lq = \frac{26 \cdot 20 \cdot \frac{26^2}{20^2}}{1 \cdot (40-26)^2} \cdot \frac{7}{33} = \frac{2197}{2310} = 0.9511\cdots$

$L = \frac{2197}{2310} + \frac{13}{10} = \frac{5200}{2310} = 2.2511\cdots$, $Wq = \frac{20 \cdot \frac{26^2}{20^2}}{1 \cdot (40-26)^2} \cdot \frac{7}{33} = \frac{1183}{32340} = 0.0366\cdots$ (秒)

2.3 2.2 から分かること

一番想像しやすいのが平均待ち時間だと思うので, 平均待ち時間を基に考える. 2.2 から平均待ち時間は約 0.04 秒であり, これぐらいの待ち時間ならストレスにはならず, 現状の改札の数で問題ないと考えられる.

今後の課題

2.3 より現状の改札の数で問題ないと思われるので, 改札ア, 改札イの退場者数がほぼ均等になるための条件を今後考えていきたい. しかし, 実際に改札の条件を変えることは困難なので, 今後駅職員に今の改札の配置と条件を決定した理由をインタビューし, その内容と今回の結果を基に新しい改札の配置と条件を検討して提案してみたい.

参考文献

[1] 桐山光弘, 待ち行列がわかる本, 日刊工業新聞社, 1997.

[2] 穴太克則, 講義：確率・統計, 学術図書出版社, 2011.

[3] 井上雅裕, 他, システム工学 定量的な意思決定法, オーム社, 2013.

[4] 岡部恒治, 他, 高等学校数学 B, 数研出版, 2014.