おばあさんが川から流れてくる
大きな桃を拾う確率

bv18025　加藤諒

2018/11/4

目次

1　研究背景

日本の昔話に桃太郎なるものがあり, そのなかにでてくるワンシーンで日常ではかなり珍しいことが起こっているので実際に自分の手で確率を求めてみようと思った.

2　研究方針

複数の事象が起こるときの確率はそれぞれの事象が起こる確率を掛けることで求めることが出来るので, おばあさんが川から流れてくる大きな桃を拾う確率をいくつかの事象に分解し, それぞれの事象が起こる確率をもとめていく. 最後にそれらを掛ける.

3　考えるべき条件

この確率を求めるにあたり, 以下のそれぞれの条件を考える.
1) 大きな桃が川を流れる条件
2) 桃の中に人が入っている条件
3) おばあさんが桃を発見する条件
4) 川から拾う条件

4　考察

4.1　条件 1) を考える

桃が川を流れるための条件を桃が水に浮くことと考える.
すなわち, 人の入った桃の密度が水の密度より小さければよい.
以下, 桃を球と考えて桃の半径を $r_{桃}$ とする.
生後 0 ヶ月の男の乳児の平均体重 3.0kg(文献 [1] より), 水の密度 0.997[g/cm^3](文献 [2] より) を用いて, さらに, 今回は桃の大きさが大きいものとして考えるので文献 [3] より桃の重さ 460g を用いると桃が浮く条件は

$$\frac{3000[\mathrm{g}] + 460[\mathrm{g}]}{\frac{4}{3}\pi r_{桃}^3[\mathrm{cm}^3]} < 0.997[\mathrm{g/cm}^3]$$

となるので

$$r_{桃} > 11.0[\mathrm{cm}]$$

であることが分かる.

4.2　条件 2) を考える

生後 0 ヶ月の男の乳児の平均体重 3.0kg(文献 [1] より) と, 年齢の差による誤差は十分無視できるとして 7 歳児の人体密度平均 1.0491g/cm^3(文献 [4] より) を用いると 0 歳児の体積を v[g] として以

下の式より v を求めることができる.

$$\frac{3000[\mathrm{g}]}{v[\mathrm{cm}^3]} = 1.0491[\mathrm{g/cm}^3]$$

となるので

$$v[\mathrm{cm}^3] = 2859.6[\mathrm{cm}^3]$$

また, 人は球状に入っていると仮定し, そのなす球の半径を $r_{人}$ とするとすると体積について次の式が成り立つ.

$$\frac{4}{3}\pi r_{人}^3 = 2859.6$$

これより

$$r_{人} = 18.89$$

となる.

4.3　条件 1) と条件 2) のまとめ

人は桃の中に入っていなければいけないので

$$r_{桃} > r_{人}$$

を満たさなければいけない.
よって, 以上の議論より,

$$r_{桃} > r_{人} = 18.89$$

を得る. 以下では右端を四捨五入した次の式を用いることにする.

$$r_{桃} \geqq r_{人} = 19$$

この条件 1), 条件 2) を満たす桃の成る確率は後で求めることにする.

4.4　条件 3) を考える

桃は一日一個, 一様に川に流れてくるものとし, おばあさんは土日を除く毎朝 7:00〜7:30 に川にいるものとする.
また, おばあさんは桃を見つけたら (好奇心から) 必ず拾うとする.
これを確率にすると,

$$\frac{1}{48} \times \frac{5}{7} = 0.015$$

となる. 以下,

$$p_{3)} = 0.015$$

とおく.

4.5　条件 4) を考える

桃は川に流れているので, 桃と川の端の間に少なくとも 1[cm] の間隔があるとする.
桃の半径が 19[cm], 桃と川の間隔が 1[cm], 重さが 3.46[kg] を用いると

$$3.46 \times 0.2 = 0.69$$

より 最低でも 0.69[kg · m] の力のモーメントを加えることが必要である.
これは, 腕の長さの平均が約 0.7[m](文献 [10] より) であることを用いると, 約 1[kg] のものを振り回す力に相当する.
これを確率として求めるのは困難なので, 今回は省略する.

4.6　条件 1)，条件 2) を満たす桃の成る確率を求める

成る桃の大きさが正規分布に従うと仮定する.

4.6.1　標準偏差の導入

この確率を求めるために, まずは標準偏差というものを導入する.
標準偏差とは, 考えたいデータの集合のそれぞれのデータと平均値の差をとり 2 乗して, それらを足して, データの個数で割ったものを最後に 2 乗根をとったものである.
標準偏差 σ，平均値 μ，i 個目のデータを x_i，データの個数 n として数式で表すと次の式になる.

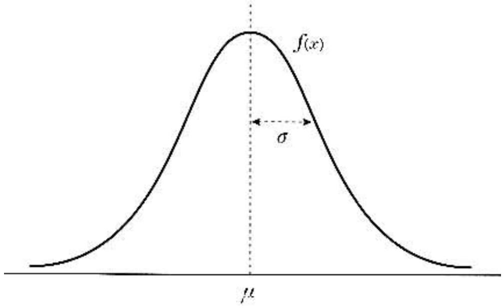
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}$$

この値は, 各データの平均との差が大きければ大きいほど大きくなり, 各データの平均との差が小さければ小さいほど小さくなる.
つまり, データの散らばりの大きい, 小さいを σ 1 文字で分かるようにしたといえる.(対応関係は下図の通り)

標準偏差	大	⇔	小
データの散らばり	大	⇔	小

4.6.2　正規分布の導入

次に, 正規分布というものを導入する.
『学校の生徒の身長などを測定してみるとか, ある植物の種子の大きさを測定してみるとか, ある地点の長年の気温の記録を集めてみるとか, 何かの量を数多く集めてみるとかすると, その量はたいてい中央くらいの大きさのものが一番たくさん出てきてそれから大きいものも小さいものもその中央の値からはずれればはずれるほど, その数は小さくなるのが一般である. そしてこの中央くらいが全体の平均にあたり, それからの偏差は正負同じように起こる場合がたびたび経験される.(中略) この窮極の形が下図のようになっているときに, これを正規分布 (normal distribution) といい, この曲線を正規分布曲線 (normal curve) という.』(文献 [5] より一部抜粋, 改訂)



この分布に従うものの確率は, そのデータの平均, 標準偏差, 確率を求めたいデータの範囲が決まればその範囲が平均から標準偏差いくつ分 離れているか考えることで正規分布曲線を積分することで求めることが出来る.

4.6.3　正規分布曲線

正規分布曲線を $f(x)$ とすると,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}x\quad(\exp X \text{ は } e^X\text{を表す})$$

と表すことが出来る. これからわかるように, 正規分布曲線は標準偏差, 平均値が決まれば一意に決まる.
また, 例えば平均より大きいある値より大きい値をとる確率を求めたかったら, その値を x として

$$\int_{\frac{x-\mu}{\sigma}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}x$$

として求めることができる.
さらに, 起こり得る事象の確率の和は 1 なので, 次の式も成り立つ.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}x=1$$

4.6.4　条件 1), 条件 2) を満たす桃の成る確率を求める

以上を踏まえて, 条件 1), 条件 2) を満たす桃の成る確率を求めていく.
桃農家の方に話を伺ったところ,「桃の平均の直径は 7.5[cm] で, その誤差は 1[cm]」ということだったので, 半径にして考えると平均 3.75[cm], 平均との誤差の平均は 0.5[cm] ということになる. よって平均を μ, 標準偏差を σ とおくと $\mu=3.75$,$\sigma=0.5$ となり, 求める確率を $p_{1),2)}$ とおくと

$$p_{1),2)}=\int_{\frac{19-\mu}{\sigma}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}x$$

が成り立つ.

この計算をコンピュータ上で有効数字 50 桁で計算したところ (文献 [6] より), 0 と出てしまった.
つまりここから分かるのはこの値は 10^{-50} 未満ということである. ここでは大きく見積もって 10^{-50}

として,

$$p_{1)2)} = 10^{-50}$$

となる.

4.7 おばあさんが川から流れてくる大きな桃を拾う確率を求める

以上の議論より, 求める確率は

$$p_{1),2)} \times p_{3)} = 10^{-50} \times 0.015 = 1.5 \times 10^{-52}$$

となる.
これは, ロト 7 の 1 等に 7 回当たるよりも低い確率となる (文献 [7] より).
(大きく見積もっての結果なので, 本当は 70 回当たるより低い確率かもしれないし, もっとかもしれない.)
今回はさらに, おばあさんが最低でも 0.69[kg · m] の力のモーメントを加えることが出来ることが必要である.

5 今後の課題

今回は, 多くのことを仮定したが今後はもう少し一般的な議論をしていきたい. また, 有効数字が 50 桁では足りなかったのでもっと精度の良い計算機を用いてやってみたい.

参考文献

[1] スクスクのっぽくん, https://www.suku-noppo.jp/data/average_weight_boy_00.html , 2018/10/30 アクセス
[2] 水の密度, https://www.google.co.jp/search?q=%E6%B0%B4%E3%81%AE%E5%AF%86%E5%BA%A6&rlz=1C1GGRV_jaJP791JP791&oq=%E6%B0%B4%E3%81%AE%E5%AF%86%E5%BA%A6&aqs=chrome..69i57j0l5.4506j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8, 2018/10/30 アクセス
[3] 桃のサイズ一覧表, https://eat-a-peach.jp/size.htm, 2018/10/30 アクセス
[4] 人体密度ならびに体脂肪量の年令別推について, 蜂須賀弘 水野勇 山岡誠一 吉村寿人, https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsnfs1949/23/1/23_1_46/_pdf, 2018/11/3 アクセス
[5] 寺田一彦 鈴木栄一, 解析入門 推論統計法 , 朝倉書店 , 1974/8/31
[6] ke!san 生活や実務に役立つ計算サイト, https://keisan.casio.jp/exec/system/1402634507, 2018/10/24 アクセス
[7] manabi〜自分にしかない幸せを〜, http://meigen.keiziban-jp.com/manabi/okane/takarakuzi/takarakuzi_ichiran/, 2018/11/3 アクセス
[8] アタリマエ!, https://atarimae.biz/archives/9850, 2018/11/3 アクセス
[9] アタリマエ!, https://atarimae.biz/archives/5379, 2018/11/3 アクセス
[10] elife, https://elife-media.jp/8283, 2018/11/3 アクセス

ご協力

群馬県 桃農家 湯澤様