

変分法と解析力学

BP18078 @futurebloodsoul

2018/11/4

はじめに

この資料は発表の際に少しばかり欠いてしまった理論の厳密性を補完し、時間の都合上、発表で取り上げることのできなかった面白い変分問題についてもまとめたものです。一部の変分問題に曲面論の知識を仮定しますが、少ない前提知識で読めるようになるべく配慮しました。また、理論体系がどのようになっているのかを把握しやすいように部分的に計算過程が省略されていますが、ご了承ください。

縮約について

物理ではテンソルなどを用いる際に、式が煩雑にならないよう和の記号 \sum を用いずに添字について和をとる、いわゆる Einstein の縮約規則がしばしば適用されます。この資料で扱うテンソルは Levi-civita の記号のみですが、それ以外にも式が煩雑になるのを避けるため、たびたび縮約がとられています。縮約が自明でないものにかぎり注釈を付けてありますが、自明であれば特に断ることなく縮約規則を適用していますので、あらかじめご了承ください。

目次

1	変分法の理論	3
1.1	関数空間と変分の導入	3
1.2	汎関数の極値の必要条件	4
1.3	変分法の基本補題	5
1.4	Euler 方程式	6
1.5	多変数関数に依存する汎関数	7
1.6	固定域問題	8
1.7	変分導関数	8
1.8	Euler 方程式の不変性	9
1.9	n 個の未知関数に依存する汎関数	9
1.10	等価な汎関数	9
1.11	変分問題のパラメータ表示	10
1.12	Euler-Poisson 方程式	10
1.13	拘束条件つきの変分問題	11
1.14	変分の一般公式	13
1.15	自由端問題	14
1.16	Weierstrass-Erdmann の条件	14
2	代表的な変分問題	16
2.1	直線の性質	16
2.2	懸垂線の方程式	16
2.3	最速降下線問題	16
2.4	極小曲面	17
2.5	測地線問題	18
2.6	等周問題	18
3	解析力学への導入	20
3.1	Lagrange 方程式と最小作用の原理	20
3.2	簡単な具体例	21
3.3	対称性と保存則	21

3.4	連成振動	23
3.5	Legendre 変換	24
3.6	Hamiltonian の導入と正準方程式	24
3.7	位相空間 (phase space)	24
3.8	正準変換と Poisson bracket	25
3.9	正準変換の母関数	26
4	今後の課題	27
5	さいごに	27

1 変分法の理論

1.1 関数空間と変分の導入

入力値を関数とする写像を汎関数 (functional) と呼び、その微分を変分 (variation) と呼ぶ。それゆえ、汎関数の連続性などの諸問題に対しては、関数間の距離の概念を導入しなければならない。

線形ノルム空間

ある集合 X の任意の元 x_1, x_2, x_3 の間に和とスカラー倍の演算が定義されたとき、以下の公理を満たすものを線形空間 (linear space) と呼ぶ。

1. 和の交換律: $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$
2. 和の結合律: $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$
3. 零元の存在: 任意の $x \in X$ に対して、 $x + 0 = x$ を満たすような $0 \in X$ が存在する。
4. $-x$ の存在: 任意の $x \in X$ に対して、 $x + (-x) = 0$ を満たすような $-x \in X$ が存在する。
5. 単位元の存在: 任意の $x \in X$ に対して、 $1 \cdot x = x$ を満たすような $1 \in X$ が存在する。
6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$)
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$)
8. $\alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$ ($\alpha \in \mathbf{R}$)

線形空間 X は、元 $x \in X$ のノルムと呼ばれる以下を満たす $\|x\| \geq 0$ が存在するとき、線形ノルム空間 (normed linear space) と呼ばれる。

1. $x = 0$ のときのみ、 $\|x\| = 0$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. ($x, y \in X, \alpha \in \mathbf{R}$)

x と y の間の距離を $\|x - y\|$ と定義すれば、線形ノルム空間において 2 つの元との間の距離を論ずることができる。

関数空間

以下のようにノルムが定義された、関数を元とする線形ノルム空間を関数空間 (function space) と呼ぶ。*1

関数空間 \mathcal{C} : 関数の絶対値の最大値をノルムとする。すなわち、 $\|y\|_0 \equiv \max_{a \leq x \leq b} \|y(x)\|$ 。

関数空間 \mathcal{D}_1 : 関数のノルムを次のように定める。 $\|y\|_1 \equiv \max_{a \leq x \leq b} \|y(x)\| + \max_{a \leq x \leq b} \|y'(x)\|$ 。

関数空間 \mathcal{D}_n : 関数のノルムを次のように定める。 $\|y\|_n \equiv \sum_{k=0}^n \max_{a \leq x \leq b} \|y^{(k)}(x)\|$ 。

よって、以下のようにして関数空間 Y 上で定義された汎関数に連続の概念が導入される。

【Definition】 汎関数の連続性

任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\|y - \hat{y}\| < \delta$ ならば $|J[y] - J[\hat{y}]| < \varepsilon$ を満たすような $\delta > 0$ が存在するとき、汎関数 $J[y]$ は点 $\hat{y} \in Y$ において連続であるという。

ある汎関数に対して極限操作などを扱えるようにするためには、その汎関数が連続となるような適当な関数空間を選べばよい。(たとえば、 $J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ ならば関数空間 \mathcal{D}_1 .)

【Definition】 線形汎関数

線形ノルム空間 X の各元 x に対応して汎関数 $\varphi[x]$ が与えられているものとし、次の条件を満足するとき、 $\varphi[x]$ を (連続な) 線形汎関数と呼ぶ。

- 1.) 任意の $x \in X$ と任意の $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して、 $\varphi[\alpha x] = \alpha \varphi[x]$.
- 2.) 任意の $x_1 \in X, x_2 \in X$ に対して、 $\varphi[x_1 + x_2] = \varphi[x_1] + \varphi[x_2]$.
- 3.) すべての $x \in X$ に対して、 $\varphi[x]$ は連続である。

ここで、ある汎関数 $J[y]$ に対して、その独立変数 y の増分を h として、 $\Delta J[h] \equiv J[y + h] - J[y]$ を考える。このとき、 $\Delta J[h]$ は一般に $h(x)$ の非線形汎関数となり、 $\Delta J[h]$ の主線形項 (すなわち、 $\Delta J[h]$ と $\|h\|$ に関して高々 1 次の無限小しか離れていない線形汎関数) を $J[h]$ の変分 (variation) $\delta J[h]$ と呼ぶ。

*1 これらの関数空間の呼び名は、I.M.Gelfand / S.V.Fomin 『変分法』にならう。

すなわち, $\Delta J[h] = \delta J[h] + \varepsilon \|h\|$ が成り立ち, $\|h\| \rightarrow 0$ のとき, $\varepsilon \rightarrow 0$ を満たす.

【Theorem】 変分の一意性

汎関数の微分 (すなわち変分) は, それが一般に存在するならば一意である.

証明 まず, $\delta J[h]$ が線形汎関数であることから, $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\delta J[h]}{\|h\|} = 0$ ならば, $\delta J[h] = 0$ となる.

実際, ある $h_0 \neq 0$ に対して $\delta J[h_0] \neq 0$ が成り立つならば,

$$h_n \equiv \frac{h_0}{n}, \frac{\delta J[h_0]}{\|h_0\|} \equiv \lambda \text{ とおけば, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta J[h_n]}{\|h_n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\delta J[h_0]}{n} \cdot \frac{n}{\|h_0\|} \right) = \lambda \neq 0 \text{ となり, 対偶が示される.}$$

ここで, $\Delta J[h]$ が以下の 2 通りで表せるものとする.

$$\Delta J[h] = \varphi_1[h] + \varepsilon_1 \|h\|, \Delta J[h] = \varphi_2[h] + \varepsilon_2 \|h\| \quad (\varphi_1, \varphi_2 \text{ は } J[h] \text{ の変分.})$$

したがって, $\varphi_1[h] - \varphi_2[h] = \varepsilon_2 \|h\| - \varepsilon_1 \|h\|$ は h に関して高々 1 次の無限小となり, $\varphi_1[h] - \varphi_2[h]$ は線形汎関数であるから, $\|h\| \rightarrow 0$ において 0 に収束する. □

1.2 汎関数の極値の必要条件

ここでは, 汎関数が極値をとるための必要条件を考える.

通常関数にならって, $J[y] - J[\hat{y}]$ が曲線 $\hat{y}(x)$ の近傍で符号を変えないとき, 汎関数 $J[y]$ が $y = \hat{y}(x)$ で極値をとると定義することにする. (このときの $\hat{y}(x)$ を停留曲線 (external) と呼ぶ.)

微分可能な関数からなる集合上で定義される汎関数について, この関数は空間 \mathcal{C} の元とも空間 \mathcal{D}_1 の元とも考えられるため, 汎関数の極値には以下の 2 種類が存在する.

【Definition】 弱極値と強極値

$\|y - \hat{y}\|_1 < \varepsilon$ を満足するすべての $y \in \mathcal{D}_1$ に対して $J[y] - J[\hat{y}]$ が同符号であるとき, 汎関数 $J[y]$ は \hat{y} で弱極値 (weak extrema) をとる.

また, $\|y - \hat{y}\|_0 < \varepsilon$ を満足するすべての $y \in \mathcal{C}$ に対して $J[y] - J[\hat{y}]$ が同符号であるとき, $J[y]$ は \hat{y} で強極値 (strong extrema) をとる.

ここで, 強極値が同時に弱極値をとるのは明らかである. (この逆は一般に正しくない.)

実際, $\|y - \hat{y}\|_1 < \varepsilon$ ならば $\|y - \hat{y}\|_0 < \varepsilon$ が成り立つので, $\|y - \hat{y}\|_1 < \varepsilon$ を満たす関数は $\|y - \hat{y}\|_0 < \varepsilon$ を満たす関数の部分集合となり, $J[\hat{y}]$ が強極値ならば弱極値となる.

また, 変分法で考察される汎関数は空間 \mathcal{D}_1 において連続であることが多いため, 弱極値は強極値より求まりやすい傾向にある.

【Theorem】 極値の必要条件

汎関数 $J[y]$ が \hat{y} において極値をとるための必要条件是, \hat{y} とすべての許容関数 h に対して, $\delta J[h] = 0$ が成り立つことである.

証明 ここでは, $J[y]$ が \hat{y} において極小値をとる場合について考える. (極大値をとる場合も同様である.)

このとき, $\|h\|$ が十分に小さいすべての h に対して, $J[\hat{y} + h] - J[\hat{y}] = \delta J[h] + \varepsilon \|h\| \geq 0$ が成り立ち,

$\|h\| \rightarrow 0$ のとき $\varepsilon \rightarrow 0$ であるので, $\delta J[h] \neq 0$ ならば, $\delta J[h] + \varepsilon \|h\|$ は $\delta J[h]$ と同符号となる.

また, $\delta J[h]$ は線形汎関数であるから, $\delta J[-h] = -\delta J[h]$ が成り立つ.

したがって, $\delta J[h] \neq 0$ ならば, $\delta J[h] + \varepsilon \|h\|$ の符号は一意に確定せず (たとえば, $-\delta J[h] + \varepsilon \|h\|$ の符号は負になり得る.), このとき極値をとることは不可能となる. □

1.3 変分法の基本補題

ここでは、のちの議論において必要となるいくつかの補題を与える。

【Lemma 1】 変分法の基本補題

$\alpha(x)$ をある連続関数とし、関数 $h(x) \in \mathcal{C}$ ($a \leq x \leq b$) が $h(a) = h(b) = 0$ を満足するものとする。

このとき、 $\int_a^b \alpha(x)h(x)dx = 0$ ならば、 $\alpha(x) = 0$ が成り立つ。

証明 ある点 c で $\alpha(c) \neq 0$, 例えば $\alpha(c) > 0$ とする。

このとき、区間 $[a, b]$ 上に $\alpha(x) > 0$ となるような区間 (ξ_1, ξ_2) が存在する。(この区間内に c が含まれる.)

また、 $h(x)$ が $h(\xi_1) = h(\xi_2) = 0$ を満足するために、 $[\xi_1, \xi_2]$ 上では $h(x) = (x - \xi_1)(\xi_2 - x)$, $[\xi_1, \xi_2]$ 以外では $h(x) = 0$ を満たすものとする。

このとき、関数はこの区間で連続で正値をとるため、

$$\int_a^b \alpha(x)h(x)dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \alpha(x)(x - \xi_1)(\xi_2 - x)dx > 0 \text{ が成り立ち、仮定に矛盾する。} \quad \square$$

【Lemma 2.1】

$\alpha(x)$ をある連続関数とし、関数 $h(x) \in \mathcal{D}_1$ ($a \leq x \leq b$) が $h(a) = h(b) = 0$ を満足するものとする。

このとき、 $\int_a^b \alpha(x)h'(x)dx = 0$ ならば、 $\alpha(x)$ ($a \leq x \leq b$) は定数関数となる。

証明 まず、条件より $h(x) = \int_a^x h'(\tau)d\tau$, $\int_a^b h'(\tau)d\tau = 0$ が成り立つ。

このとき、 $\int_a^b (\alpha(x) - c)dx = 0$ を満たす定数 c を用いて、任意の連続関数 $f(x)$ に対して

$$\int_a^b (\alpha(x) - c)f(x)dx = 0 \text{ が成り立つことを示す。}$$

$f(x)$ は任意の連続関数であるので、 $\int_a^b g(x)dx = 0$ を満たす $g(x)$ と定数 β を用いて、 $f(x) = g(x) + \beta$ のように表される。

$$\text{よって、} \int_a^b (\alpha(x) - c)f(x)dx = \int_a^b (\alpha(x) - c)g(x)dx + \beta \int_a^b (\alpha(x) - c)dx = 0 \text{ が成り立つ。}$$

ここで、 $f(x) = \alpha(x) - c$ とすれば、 $\int_a^b (\alpha(x) - c)^2 dx = 0$ が成り立つので、 $\alpha(x) - c = 0$ を得る。

したがって、 $\alpha(x)$ は $[a, b]$ 上において定数関数となる。 \square

【Lemma 2.2】

$\alpha(x), \beta(x)$ を連続関数とし、関数 $h(x) \in \mathcal{D}_1$ ($a \leq x \leq b$) が $h(a) = h(b) = 0$ を満足するものとする。

このとき、 $\int_a^b (\alpha(x)h(x) + \beta(x)h'(x))dx = 0$ ならば、 $\beta(x)$ は微分可能であり、 $\alpha(x) - \beta'(x) = 0$ ($a \leq x \leq b$) が成り立つ。

証明 $A(x) \equiv \int_a^x \alpha(\tau)d\tau$ で定義された $A(x)$ を用いると、部分積分によって、

$$\int_a^b (\alpha(x)h(x) + \beta(x)h'(x))dx = \int_{x_1}^{x_2} (-A(x) + \beta(x))h'(x)dx = 0 \text{ を得る。}$$

したがって、Lemma 2.1 より $\beta(x) - A(x) = \text{const.}$ が成り立ち、 $\beta'(x) = \alpha(x)$ を得る。 \square

【Theorem】 微分と変分の交換法則

関数 $y(x)$ の微小増分を $\delta y(x)$ としたとき、 $\frac{d}{dx}\delta y = \delta\left(\frac{dy}{dx}\right)$ が成り立つ。

$$\begin{aligned}\text{証明 } \delta\left(\frac{dy}{dx}\right) &= \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \left(\frac{y(x_2) + \delta y(x_2) - y(x_1) - \delta y(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} \right) \\ &= \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{\delta y(x_2) - \delta y(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{d}{dx}\delta y.\end{aligned}$$

□

1.4 Euler 方程式

ここで、 $\delta J[h] = 0$ のとき、Euler 方程式が成り立つことを 2 つの方法で示す.*2

【Theorem】 Euler 方程式

$y(a) = A, y(b) = B$ を満足する関数 $y(x)$ の集合上で定義される汎関数 $J[y] \equiv \int_a^b F(x, y, y') dx$ がある関数 $y(x)$ で弱極値をとるための必要条件は、この関数 $y(x)$ が Euler 方程式 $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ を満足することである。

証明 $J[y]$ が弱極値をとるための必要条件を得るために、 $J[y]$ の変分を求める。

関数 $y(x)$ に増分 $h(x)$ を与えたとき、境界条件の仮定より、 $h(a) = h(b) = 0$ が成り立つ。

このとき $J[y]$ の増分は、

$$\Delta J = J[y + h] - J[y] = \int_a^b F(x, y + h, y' + h') dx - \int_a^b F(x, y, y') dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} h + \frac{\partial F}{\partial y'} h' \right) dx + \dots$$

となる.*3

よって、 $\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} h + \frac{\partial F}{\partial y'} h' \right) dx$ が ΔJ の主線形項、すなわち変分 δJ となり、

$\delta J = 0$ のとき、Lemma 2.2 より $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ を得る。

□

証明 $J[y]$ が弱極値をとるための必要条件を得るために、 $J[y]$ の変分を求める。

関数 $y(x)$ に増分 $\delta y(x)$ を与えたとき、境界条件の仮定より、 $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$ が成り立つ。

このとき $J[y]$ の増分は、

$$\Delta J = J[y + h] - J[y] = \int_a^b F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx - \int_a^b F(x, y, y') dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx + \dots$$

となる。

よって、微分と変分の交換法則を用いると、 $\delta J = 0$ より

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right) dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_a^b = 0 \text{ が成り立つので、}$$

変分法の基本補題より、 $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ を得る。

□

Euler 方程式は極値の必要条件ではあるが十分条件ではない。しかし、場合によっては Euler 方程式だけで問題の解が完全に与えられることもある。例えば測地線問題では極値の存在は明らかであり、そのような場合、問題の境界条件を満たす停留曲線がただ 1 つしかないときには、自明にそれは求める極値を与える曲線となる。

ところで、汎関数 $J[y]$ に対する Euler 方程式は 2 階微分方程式であるが、この $J[y]$ の停留曲線が 2 回微分可能であることが確かめられない場合もある。

このとき、連続な 1 階導関数をもつ停留曲線が 2 次の導関数をもつことは次の定理によって保証される。

*2 ただし、この 2 つの方法に本質的な差異はない。

*3 このとき、 \dots は h および h' に関する 2 次以上の高次の項を表している。

【Theorem】

関数 $F(x, y, y')$ のすべての変数に関する 2 階以下の偏導関数が連続であるならば, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y(x), y'(x)) \neq 0$ を満たすすべての点 (x, y) で停留曲線 $y(x)$ は 2 回微分可能である.

証明 $\frac{\Delta \frac{\partial F}{\partial y'}}{\Delta x} = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y' \partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y' \partial y} \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y'^2} \frac{\Delta y'}{\Delta x}$ の $\Delta x \rightarrow 0$ における極限を考える. ^{*4*5}

このとき, F の 2 階導関数は仮定より連続であるので, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y' \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x}$ が成り立つ.

また, y' の存在と $\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y' \partial y}$ の連続性によって第 2 項の極限の存在も保証され, それゆえ第 3 項の極限も存在する.

したがって, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \neq 0$ のとき $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = y''(x)$ が存在し, Euler 方程式から y'' を求めること

ができるので, $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \neq 0$ を満たすすべての点で y'' は連続である. \square

1.5 多変数関数に依存する汎関数

ここでは, 汎関数が曲面に依存する場合に, 前述の議論がどのように改められるかを見る. 以下の議論は n 変数の場合にも同様に成り立つが, 簡単のため, 2 変数の場合を考察する.

具体的には, ある閉領域 G の境界 Γ で定数値をとる関数 $z(x, y)$ のうち, $J[z] \equiv \iint_G F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy$ が最小となるものを求める.

このとき, $\delta J[z]$ の計算過程において, 変分法の基本補題に代わる以下の補題を必要とする.

【Theorem】 変分法の基本補題 (多変数 ver.)

閉領域 G で連続な固定された関数を $f(x, y)$ とする.

このとき, G で連続な 2 階以下の変導関数を持ち, G の境界 Γ で 0 となるようなすべての $h(x, y)$ に対して $\iint_G f(x, y)h(x, y) dx dy = 0$ が成り立つとき, G のすべての点で $f(x, y) = 0$ が成り立つ.

証明 ある点 (x_0, y_0) で $f(x, y)$ が正の値をとるものとする. (負の場合についても同様に議論される.)

このとき, $f(x, y)$ が中心 (x_0, y_0) , 半径 ρ のある円の中でも正の値をとるものとするれば,

$h(x, y)$ を, $h(x, y) = \begin{cases} 0 & : \text{円外} \\ ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \rho^2)^2 & : \text{円内} \end{cases}$ のように定めることにより,

$\iint_G f(x, y)h(x, y) dx dy$ はこの円上の積分となるので正の値をとり, 対偶が示される. \square

G で連続な 2 階以下の偏導関数をもつ $h(x, y)$ を G の境界 Γ で 0 となるような任意の関数としたとき, $z(x, y) + h(x, y)$ もまた $J[z]$ の定義域に属する.

したがって, Green の定理を用いると, ΔJ は以下のように計算される.

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[z + h] - J[z] \\ &= \iint_G \left(F\left(x, y, z + h, \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y}\right) - F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \right) dx dy \\ &= \iint_G \left(\frac{\partial F}{\partial z} h + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right) dx dy + \dots \\ &= \iint_G \left(\frac{\partial F}{\partial z} h + h \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} \right) \right) dx dy + \iint_G \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} h \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} h \right) \right) dx dy + \dots \\ &= \iint_G \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} \right) h(x, y) dx dy + \int_{\Gamma} \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} h dx + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} h dy \right) + \dots \end{aligned}$$

*4 \tilde{F} はその導関数がある中間の曲線に沿った値であることを意味する.

*5 Euler 方程式よりこの極限は存在する.

このとき $h(x, y)$ は Γ において 0 であるから, $J[z]$ が極値をとるための必要条件として以下の式を得る.

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} = 0$$

1.6 固定域問題

固定域問題とは, 両端点がそれぞれ $x = a, x = b$ の上にある曲線のうち, $J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ が極値をとる場合に対する考察である.*6

このとき, y の増分 $h(x)$ は両端点で 0 にならず, かつ停留曲線は Euler 方程式を満たすので, 以下の式を得る.

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) h(x) dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} h(x) \right]_a^b = \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=b} h(b) - \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=a} h(a)$$

よって, $h(x)$ の任意性に着目すれば, 自然な境界条件と呼ばれる以下の式を得る.

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=b} = \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=a} = 0$$

つまり, 固定域問題を解くためには Euler 方程式を解き, その一般解に含まれる任意定数を自然な境界条件から求めればよい.

1.7 変分導関数

汎関数において, 偏導関数と同様の役割を果たす概念を変分導関数 (variational derivative) と呼ぶ.

簡単のため, 汎関数が $J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ という形である場合について考える.

まず, 区間 $[a, b]$ を区間幅 $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ の $n + 1$ 個の等間隔区間に分割すれば, $J[y]$ は以下のように近似される.

$$J[y] \simeq J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \sum_{i=0}^n F \left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \right) \Delta x$$

このとき, $J[y_1, y_2, \dots, y_n]$ の y_k に関する偏導関数は以下のようになる.*7

$$\frac{\partial J}{\partial y_k} = \frac{\partial F}{\partial y} \left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} \right) \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y'} \left(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x} \right) - \frac{\partial F}{\partial y'} \left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} \right)$$

あとはこの式に対して極限 $\Delta x \rightarrow 0$ をとることが自然な発想であるように思えるが, この式の右辺は明らかに 0 に近づいてしまうから, 一般にそうならないような極限を得るために両辺を Δx で割ると, 以下の式を得る.*8

$$\frac{\partial J}{\partial y_k \Delta x} = \frac{\partial F}{\partial y} \left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} \right) + \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \left(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x} \right) - \frac{\partial F}{\partial y'} \left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} \right) \right)$$

このとき, 変分導関数はこの式の極限操作 $\Delta x \rightarrow 0$ によって定義され, 結果的に Euler 方程式の左辺が得られるので, Euler 方程式は各点で汎関数の変分導関数が 0 になることを意味している.

この議論を拡張することで, 一般の変分導関数を定義する.

汎関数 $J[y]$ についてある点 x_0 の近傍のみにおいて 0 でない y の増分を h とし, h と x 軸で囲まれる面積を Δs とすれば, $\Delta s \rightarrow 0$ によって $h(x) \neq 0$ を満たす区間の長さ $|h(x)|$ が 0 に近づくものとして, 点 x_0 における $J[y]$ の変分導関数は

$$\frac{\delta J}{\delta y} \Big|_{x=x_0} \equiv \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{J[y+h] - J[y]}{\Delta s}$$

のように定義される.

一般に変分導関数は通常の導関数と同様の性質をもち, たとえば以下の式が成り立つことは直感的に理解できる.

$$\Delta J = \left(\frac{\delta J}{\delta y} \Big|_{x=x_0} + \varepsilon \right) \Delta s$$

*6 対称的に, 基本問題を固定端問題と呼ぶこともある.

*7 変数 y_k は $i = k, i = k - 1$ に対応する 2 つの項に含まれる.

*8 $\delta y_k \Delta x$ は, 折れ線近似した曲線が別の曲線に変化したときの微小な面積変化を表す.

1.8 Euler 方程式の不変性

変数変換 $(x, y) \rightarrow (u, v)$ に対して Euler 方程式が不変に保たれることを見る。

このとき、汎関数 $J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ は変数変換によって以下のように変形される。

$$J_1[y] = \int_{a_1}^{b_1} F \left(x(u, v), y(u, v), \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} v' \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} v' \right) du = \int_{a_1}^{b_1} F_1(u, v, v') du$$

ここで、ある関数 $y(x)$ が Euler 方程式を満足するとき、 $v(u)$ が対応する Euler 方程式を満足することを示す。

$y(x)$ と $y(x) + h(x)$ で囲まれる面積を Δs とし、対応する $v(u)$ と $v(u) + \eta(u)$ で囲まれる面積を $\Delta \sigma$ とすれば、これらの面積の比は 0 でないヤコビアンとなるので、 $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{J[y+h] - J[y]}{\Delta s} = 0$ ならば $\lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \frac{J_1[v+\eta] - J_1[v]}{\Delta \sigma} = 0$ が成り立つ。

ゆえに、曲線が停留曲線であるという性質は、座標系の選び方に依存しない。

1.9 n 個の未知関数に依存する汎関数

n 個の変関数をもつ汎関数 $J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx$ の極値問題について考察する。ただし、 F はすべての変数に関して 2 階以下の偏導関数を持ち、 y_i は境界条件 $y_i(a) = A_i, y_i(b) = B_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を満足するものとする。^{*9}

まず、 $y_i(x)$ の増分を $h_i(x)$ とすれば、変分の定義にしたがって以下を得る。

$$\delta J = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'} h_i' \right) dx$$

このとき、 $h_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) の独立性より、境界条件を守りながらそれらの 1 個を任意に選びだし、残りをすべて 0 にすることができるので、 $J[y]$ が極値をとるための必要条件として

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'} h_i' \right) dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

が得られ、以下に示す連立 Euler 方程式を得る。

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i'} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

この場合の Euler 方程式は n 個の連立 2 階微分方程式であるので、一般解には境界条件によって定められる $2n$ 個の任意定数が含まれる。

1.10 等価な汎関数

Euler 方程式の左辺が与えられたときの汎関数 $J[y] = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx$ は一意に定まらず、実際、2 回連続微分可能な関数 $\phi(x, y_1, \dots, y_n)$ の x に関する全微分項 $\psi(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n')$ を F に付け加えても、

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_i'} \right) = 0$$

より Euler 方程式の左辺は不変に保たれる。

また、このことは

$$\tilde{J} \equiv \int_a^b \left(F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') + \frac{d}{dx} \phi(x, y_1, \dots, y_n) \right) dx = J + \phi(b, y_1^{(b)}, \dots, y_n^{(b)}) - \phi(a, y_1^{(a)}, \dots, y_n^{(a)})$$

より、 $\delta J = \delta \tilde{J}$ が成り立つことから理解できる。^{*10}

このように 2 つの相異なる汎関数が同じ停留関数をもつとき、これらは等価であるといい、前述したように x に関する全微分項だけ異なる被積分関数をもつ汎関数どうしは等価であるし、被積分関数が定数倍だけ異なっている場合も等価である。

^{*9} つまり、 $n+1$ 次元 Euclid 空間上の 2 点を結ぶ曲線族に対して汎関数が極値をとるための必要条件を考える。

^{*10} $y_i^{(j)}$ は、関数 $y_i(x)$ に $x=j$ を代入した定数である。

よって、以下の定理を得る。

【Theorem】 等価な汎関数

以下のような関係をもつ F_1, F_2 をそれぞれを x で積分した汎関数どうしは等価である。

$$F_2(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = CF_1(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) + \frac{d}{dx}\phi(x, y_1, \dots, y_n)$$

ここに、 C は定数関数とし、 ϕ は 2 回連続微分可能な関数である。

すなわち、等価である汎関数どうしは、停留等の条件に関して同等の性質をもつ。

1.11 変分問題のパラメータ表示

基本問題に限り、関数 $y(x)$ が $y = y(t), x = x(t)$ のようにパラメータ表示された場合について考察する。

まず、対象の汎関数は

$$J = \int_a^b F(x, y, y') dx = \int_{t_1}^{t_2} F\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) \dot{x}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$$

のように書き換えられ、被積分関数 ϕ は $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$ に関して 1 次の正同次式となる。^{*11} (\cdot は t に関する微分演算を表す。)

このような汎関数は $x-y$ 平面上の曲線のみ依存し、パラメータ t そのものには依存せず、実際、 $t = t(\tau)$ ($\frac{dt}{d\tau} > 0$) で表される新しいパラメータ τ を導入すれば、 ϕ が $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$ に関して 1 次の正同次式であることを利用して、 $\int_{t_1}^{t_2} \phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \phi\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) d\tau$ を得る。

よって、以下の定理を得る。

【Theorem】 変分問題のパラメータ表示

汎関数 $\int_{t_1}^{t_2} \phi(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$ が $x = x(t), y = y(t)$ で与えられる $x-y$ 平面上の曲線のみ依存し、パラメータのとり方に依存しないための必要十分条件は、被積分関数 ϕ が t に陽に依存せず、 \dot{x}, \dot{y} に関して 1 次の正同次式であることである。

対象の汎関数に対する Euler 方程式は $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$ であり、これは $\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}}\right) = 0, \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}}\right) = 0$ という独立でない 2 つの Euler 方程式と等価である。

1.12 Euler-Poisson 方程式

$J[y] = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$ のように被積分関数が未知関数の n 次までの導関数を含む場合の変分問題、すなわち $[a, b]$ 上で境界条件 $\begin{cases} y(a) = A_0, y'(a) = A_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = A_{n-1} \\ y(b) = B_0, y'(b) = B_1, \dots, y^{(n-1)}(b) = B_{n-1} \end{cases}$ を満足するとき、空間 \mathcal{D}_n のすべての $y(x)$ のうち、 $J[y]$ が極値をとるものを求める問題について考察する。

汎関数が極値をとるための必要条件はその変分が 0 になることであるという定理は当然この場合においても成り立つので、今までと同様の手法にして $\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} h + \frac{\partial F}{\partial y'} h' + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} h^{(n)}\right) dx = 0$ を得る。

ここから部分積分をして $h(x)$ の境界条件を用いると、変分法の基本補題より、Euler-Poisson 方程式と呼ばれる以下の式を得る。

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right) = 0$$

Euler-Poisson 方程式は F がすべての変関数に関する $n+1$ 階までの偏導関数をもつ場合には当然成り立つが、それ以外の場合にも成り立つことが、Lemma 2.2 を拡張した定理を用いることで証明される。

^{*11} つまり、すべての $k > 0$ に対して $\phi(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = k\phi(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ を満足する。

1.13 拘束条件つきの変分問題

境界条件とは異なる拘束条件が付与された変分問題について、拘束条件の種類によって区別される case 1, case 2 について考察する。^{*12}

case 1

以下の定理に登場する拘束条件が付与された変分問題を、便宜的に case 1 と呼ぶ。

【Theorem】 変分法における Lagrange の未定乗数法 (case 1)

許容曲線 $y(x)$ が境界条件 $y(a) = A, y(b) = B$ と拘束条件 $K[y] = \int_a^b G(x, y, y') dx = l$ ($l \in \mathbf{R}$) を満足し、 $J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ に極値を与えるとき、

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \lambda \left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) \right) = 0$$

を満足するような定数 λ が存在する。^a

^a すなわち、 $y(x)$ が汎関数 $\int_a^b (F + \lambda G) dx$ の停留曲線となるような $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在する。

証明 $y(x)$ が $K[y] = l$ のもとで $J[y]$ に極値を与えるものとする。

ここで、 $[a, b]$ 上の任意の 2 点 x_1, x_2 の近傍でのみ 0 でない $h(x) = \delta_1 y(x) + \delta_2 y(x)$ を $y(x)$ に加える。^{*13}

このとき、 $\sigma_1 = \int_a^{x_1} \delta_1 y(x) dx, \sigma_2 = \int_{x_1}^{x_2} \delta_2 y(x) dx$ とおけば、変分導関数の定義より

$$\Delta J = \left(\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \Big|_{x=x_1} + \varepsilon_1 \right) \sigma_1 + \left(\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \Big|_{x=x_2} + \varepsilon_2 \right) \sigma_2 \text{ が得られる。}$$

また、増分が付与された $y^*(x) = y(x) + h(x)$ が $K[y^*] = K[y]$ を満足すれば、

$$\Delta K = \left(\left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) \right] \Big|_{x=x_1} + \varepsilon'_1 \right) \sigma_1 + \left(\left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) \right] \Big|_{x=x_2} + \varepsilon'_2 \right) \sigma_2 = 0 \text{ が得られ、}$$

点 x_2 が $\frac{\delta G}{\delta y} \Big|_{x=x_2} \neq 0$ を満たすとすれば、 $y(x)$ が K の停留曲線でないことを示すこの仮定によって、

$$\sigma_2 = - \left(\left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) \right] \Big|_{x=x_1} + \varepsilon' \right) \sigma_1 \text{ の存在が保証され、} \lambda \equiv - \frac{\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \Big|_{x=x_2}}{\left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) \right] \Big|_{x=x_1}} \text{ とおけば、}$$

前述した ΔJ の式は、

$$\Delta J = \left(\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \Big|_{x=x_1} + \lambda \left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) \right] \Big|_{x=x_1} \right) \sigma_1 + \varepsilon \sigma_1 \text{ の形に帰着する。}^{\ast 14}$$

よって、極値の必要条件より $\delta J = \left(\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \Big|_{x=x_1} + \lambda \left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) \right] \Big|_{x=x_1} \right) \sigma_1 = 0$

が得られ、 $\sigma_1 \neq 0$ と x_1 の任意性より $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \lambda \left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) \right) = 0$ を得る。□

この定理が用いられる有名な例として、等周問題が挙げられる。

また、同様の証明を用いてこの定理を拡張すれば、境界条件 $y_i(a) = A_i, y_i(b) = B_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) と $k (< n)$ 個の拘束条件 $\int_a^b G_j(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx = l_j$ ($j = 1, 2, \dots, k$) のもとで $J = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$ が極値をとるための必要条件は以下ようになる。

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(F + \sum_{j=1}^k \lambda_j G_j \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial y'_i} \left(F + \sum_{j=1}^k \lambda_j G_j \right) \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

^{*12} case 1 を等周問題と呼び、case 2 を Lagrange の問題と呼ぶこともある。ただ、例題としての等周問題との混同を避けるために、本資料ではこれらの呼称は用いない。

^{*13} $\delta_i y(x)$ ($i = 1, 2$) は、 x_i の近傍でのみ 0 でない $y(x)$ の増分である。

^{*14} この式には $x = x_1$ における変分導関数しか含まれないため $h(x)$ は $\delta_1 y(x)$ のみとなるが、 $\delta_2 y(x)$ の分は $\Delta K = 0$ より自明に保証される。

case 2

許容曲線 $y_i(x)$ が境界条件 $y_i(a) = A_i, y_i(b) = B_i (i = 1, 2, \dots, n)$ と $k (< n)$ 個の拘束条件 $g_j(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0 (j = 1, 2, \dots, k)$ を満足するときの汎関数 $\int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$ の極値を求める問題を、便宜的に case 2 と呼ぶ。

case 1 との差異は拘束条件が変数間の関係として与えられることにあるが、ここでは簡単のため、 $n = 2, k = 1$ の場合について考察するものとし、このとき以下の定理が成り立つ。

【Theorem】 変分法における Lagrange の未定乗数法 (case 2)

曲面 $g(x, y, z) = 0^a$ 上の許容曲線 $y = y(x), z = z(x)$ が $J[y, z] = \int_a^b F(x, y, z, y', z') dx$ の条件つき極値を与え、この曲線上の任意の点で $\frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$ または $\frac{\partial g}{\partial z} \neq 0$ が満たされるならば、

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) + \lambda \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

を満足するような $\lambda(x)$ が存在する。^b

^a 力学ではこの形を holonomic な拘束条件と呼び、対称的に被積分関数に導関数が含まれる場合、nonholonomic な拘束条件と呼ぶ。

^b すなわち、許容曲線が $\int_a^b (F + \lambda(x)g) dx$ の停留曲線となるような $\lambda(x)$ が存在する。

証明 $y(x), z(x)$ を $J[y, z]$ の停留曲線とし、 $y^*(x), z^*(x)$ をその近くの許容曲線とする。^{*15}

このとき、 $\delta y(x) \equiv y^* - y, \delta z(x) \equiv z^* - z$ が $[a, b]$ 内のある点 x_1 の近傍 $[\alpha, \beta]$ でのみ 0 でないものとする。

ここで、 $\sigma_1 = \int_a^b \delta y(x) dx, \sigma_2 = \int_a^b \delta z(x) dx$ とすれば、 $\Delta J = \left(\frac{\delta F}{\delta y} \Big|_{x=x_1} + \varepsilon_1 \right) \sigma_1 + \left(\frac{\delta F}{\delta z} \Big|_{x=x_1} + \varepsilon_2 \right) \sigma_2$

が成り立ち、 $\sigma_1, \sigma_2 \rightarrow 0$ のとき $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ である。

また、 $y^*(x), z^*(x)$ は許容曲線なので、

$$\int_a^b (g(x, y^*, z^*) - g(x, y, z)) dx = \int_\alpha^\beta \left(\frac{\bar{\partial} g}{\partial y} \delta y + \frac{\bar{\partial} g}{\partial z} \delta z \right) dx = \left(\frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{x=x_1} + \varepsilon'_1 \right) \sigma_1 + \left(\frac{\partial g}{\partial z} \Big|_{x=x_1} + \varepsilon'_2 \right) \sigma_2 = 0$$

が成り立つ。^{*16}

ゆえに仮定より σ_1, σ_2 の少なくとも一方の係数は 0 でないので、 $\sigma_2 = - \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{x=x_1} + \varepsilon'_1}{\frac{\partial g}{\partial z} \Big|_{x=x_1} + \varepsilon'_2} \right) \sigma_1$ が得られ、

極値をとるための必要条件として $\delta J = \left(\frac{\delta F}{\delta y} \Big|_{x=x_1} - \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial y} \delta F}{\frac{\partial g}{\partial z} \delta z} \right) \Big|_{x=x_1} \right) \sigma_1 = 0$ を得る。

このとき $\sigma_1 \neq 0$ と x_1 の任意性より $\frac{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)}{\frac{\partial g}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right)}{\frac{\partial g}{\partial z}}$ が得られ、停留曲線 $y(x), z(x)$ に沿ってこの値は x の関数となるので、これを $\lambda(x)$ とおけばよい。□

この定理は拘束条件が nonholonomic である場合にも成立する。

また、この拘束条件がある点 x_1 でのみ満たされるならば拘束条件は y, z の汎関数とみなせるので、この問題は case 1 に帰着する。すなわち、case 2 は汎関数の型の条件を無限個集めた case 1 の一般化と解され、 $\lambda(x)$ は各点 x における未定乗数の関数と解される。

*15 このような曲線の存在は陰関数定理によって保証されるらしいが、私はよくわかっていない。

*16 bar 記号は、ある部分曲線に沿った導関数を表す。

1.14 変分の一般公式

基本問題と異なり、汎関数 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ に対してその値を定める曲線の両端が任意に移動する場合を考える。

このとき、すべての許容曲線はなめらかであるものとし、 y の両端の値を P_0, P_1 、 y^* の両端の値を P_0^*, P_1^* とすれば、 $y(x)$ と $y^*(x)$ の間の距離は、 $\rho(y, y^*) \equiv \max|y - y^*| + \max|y' - y'^*| + \rho(P_0, P_0^*) + \rho(P_1, P_1^*)$ のように定義される。^{*17}

ここで、 $y(x)$ の両端を $P_0 = (x_0, y^0)$ 、 $P_1 = (x_1, y^1)$ とし、 $y^* = y + h$ の両端を $P_0^* = (x_0 + \delta x_0, y^0 + \delta y^0)$ 、 $P_1^* = (x_1 + \delta x_1, y^1 + \delta y^1)$ とする。また、 δJ は $h(x)$ 、 $h'(x)$ 、および δx_0 、 δy^0 、 δx_1 、 δy^1 に関して線形であるものとし、 ΔJ とは $\rho(y, y + h)$ の 2 次以上の微小量でしか異ならないものとする。

この場合の変分の意味は基本問題とは異なるが、前述の証明と同様に $J[y]$ が極値をとるための必要条件は $\delta J = 0$ であることがわかるので、

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_{x_0 + \delta x_0}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + h, y' + h') dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (F(x, y + h, y' + h') - F(x, y, y')) dx + \int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F(x, y + h, y' + h') dx - \int_{x_0}^{x_0 + \delta x_0} F(x, y + h, y' + h') dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) h(x) dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} h \right]_{x_0}^{x_1} + F(x, y, y')|_{x=x_1} \delta x_1 - F(x, y, y')|_{x=x_0} \delta x_0 + \dots \end{aligned}$$

となり、補助曲線によってこの積分は有効となる。(… は $\rho(y, y + h)$ に関して 2 次以上の微小量である。)

また、直線の挿入によって明らかに $h(x_0) = \delta y^0 - y'(x_0) \delta x_0 + \dots$ 、 $h(x_1) = \delta y^1 - y'(x_1) \delta x_1 + \dots$ が成り立つので、 $\delta x_i = \delta x|_{x=x_i}$ 、 $\delta y^i = \delta y|_{x=x_i}$ とすれば、以下のような変分を得る。

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) h(x) dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=x_1} \delta y^1 + \left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) \Big|_{x=x_1} \delta x_1 - \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=x_0} \delta y^0 + \left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) \Big|_{x=x_0} \delta x_0 \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) h(x) dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} + \left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) \delta x \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} \end{aligned}$$

ここでさらに、対象の汎関数を $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_i, y'_i) dx$ に拡張する。^{*18}

このとき、 $n = 1$ の場合と同様に $h_i(x) \equiv y_i^*(x) - y_i(x)$ とし、 $y_i(x)$ の両端を $P_0 = (x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ 、 $P_1 = (x_1, y_1^1, \dots, y_n^1)$ 、 $y_i^*(x)$ の両端を $P_0^* = (x_0 + \delta x_0, y_1^0 + \delta y_1^0, \dots, y_n^0 + \delta y_n^0)$ 、 $P_1^* = (x_1 + \delta x_1, y_1^1 + \delta y_1^1, \dots, y_n^1 + \delta y_n^1)$ とする。^{*19} また、 δJ は h_i 、 h'_i 、および δx_0 、 δx_1 、 δy_i^0 、 δy_i^1 ($i = 1, 2, \dots, n$) に関して線形であるものとし、 ΔJ とは $\rho(y_1, y_1^*) + \dots + \rho(y_n, y_n^*)$ の 2 次以上の微小量でしか異ならないものとする。

ここで $h_i(x_0) \simeq \delta y_i^0 - y'_i(x_0) \delta x_0$ 、 $h_i(x_1) \simeq \delta y_i^1 - y'_i(x_1) \delta x_1$ が成り立つことを考慮し、 $\delta x_j = \delta x|_{x=x_j}$ 、 $\delta y_i^j = \delta y_i|_{x=x_j}$ とすれば $n = 1$ の場合と同様に以下のような変分を得る。

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_i} \right) \right) h_i(x) dx + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y'_i} \delta y_i \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} + \left(F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y'_i} y'_i \right) \delta x \Big|_{x=x_0}^{x=x_1}$$

ちなみに、 $p_i \equiv \frac{\partial F}{\partial y'_i}$ 、 $H \equiv -F + \sum \frac{\partial F}{\partial y'_i} y'_i = -F + \sum p_i \frac{\partial F}{\partial y'_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) という記号^{*20}を導入すれば、 J の変分は $\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \sum \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{dp_i}{dx} \right) h_i(x) dx + \left(\sum p_i \delta y_i - H \delta x \right) \Big|_{x=x_0}^{x=x_1}$ のように変形される。

^{*17} 右辺の ρ は通常の Euclid の意味での距離である。また、この式が常に意味をもつためには、たとえば補助直線を入れることで区間を拡張する必要がある。

^{*18} 正確な表記は $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$ である。

^{*19} このときも、 $y_i(x)$ 、 $y_i^*(x)$ はそれぞれ直線的に延長しておくものとする。

^{*20} 後述するように、 H は変数変換 $y'_i \rightarrow p_i$ に対して F を Legendre 変換したものである。

このときの変数 $x, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n$ は正準変数 (canonical variable) と呼ばれ, このような変数変換はいくつかの変分問題に対して有用である.*21

ここで, $P_0 = (x_0, y_1^0, \dots, y_n^0), P_1 = (x_1, y_1^1, \dots, y_n^1)$ を結ぶある曲線が停留曲線であるとすれば, Euler 方程式より以下の式が得られる.

$$\delta J = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i'} \delta y_i \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} + \left(F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i'} y_i' \right) \delta x \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} \quad \text{または} \quad \delta J = \left(\sum p_i \delta y_i - H \delta x \right) \Big|_{x=x_0}^{x=x_1}$$

1.15 自由端問題

ここでは, 曲線 $y = \varphi(x)$, および $y = \psi(x)$ 上にある 2 つの点 P_0, P_1 を両端点とするなめらかな曲線のうち, $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ に極値を与える問題, すなわち自由端問題について考察する.

このときの曲線は停留曲線であるから, Euler 方程式より以下の変分を得る.

$$\delta J = \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=x_1} \delta y_1 + \left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) \Big|_{x=x_1} \delta x_1 - \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=x_0} \delta y_0 + \left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) \Big|_{x=x_0} \delta x_0$$

ここで, $\delta x_0 \rightarrow 0$ のとき $\varepsilon_0 \rightarrow 0$, $\delta x_1 \rightarrow 0$ のとき $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ とすれば, 明らかに $\delta y_0 = (\varphi' + \varepsilon_0) \delta x_0$, $\delta y_1 = (\psi' + \varepsilon_1) \delta x_1$ が成り立つので, $J[y]$ が極値をとるための必要条件として,

$$\delta J = \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \psi' + F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) \Big|_{x=x_1} \delta x_1 - \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \varphi' + F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) \Big|_{x=x_0} \delta x_0 = 0$$

が得られ, $\delta x_0, \delta x_1$ は独立なので, 以下の式を得る.

$$\left(F + \frac{\partial F}{\partial y'} (\varphi' - y') \right) \Big|_{x=x_0} = 0, \quad \left(F + \frac{\partial F}{\partial y'} (\psi' - y') \right) \Big|_{x=x_1} = 0$$

これらは横断性条件 (transversality condition) と呼ばれ, この条件を満たす曲線 $y(x)$ は, 曲線 $\varphi(x)$ および $\psi(x)$ を横断するという.

まとめると, 自由端問題を解くためには Euler 方程式を解き, その一般解に含まれる 2 つの任意定数を横断性条件から求めればよい.

また, 複数の関数に依存する汎関数に対しても同様に考えられ, 曲面 $x = \varphi(y, z)$ および $x = \psi(y, z)$ 上にある 2 つの点 P_0, P_1 を両端点とするなめらかな曲線のうち, $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx$ に極値を与える問題は, 以下の Euler 方程式と横断性条件を解くことで解決される.

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' - \frac{\partial F}{\partial z'} z' \right) \right) \Big|_{x=x_0} &= 0, & \left(\frac{\partial F}{\partial z'} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' - \frac{\partial F}{\partial z'} z' \right) \right) \Big|_{x=x_0} &= 0 \\ \left(\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' - \frac{\partial F}{\partial z'} z' \right) \right) \Big|_{x=x_1} &= 0, & \left(\frac{\partial F}{\partial z'} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' - \frac{\partial F}{\partial z'} z' \right) \right) \Big|_{x=x_1} &= 0 \end{aligned}$$

1.16 Weierstrass-Erdmann の条件

許容曲線の族を角点をもつ曲線にまで拡張することで解決される変分問題がしばしば見られる.

ここで, 境界条件 $y(a) = A, y(b) = B$ を満足し, $J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ が弱極値をとるときの点 c ($a < c < b$) を除く区間 $[a, b]$ でなめらかな $y(x) \in \mathcal{D}_1$ を求める問題を考察する.*22

まず, $J_1[y] \equiv \int_a^c F(x, y, y') dx, J_2[y] \equiv \int_c^b F(x, y, y') dx$ としたときのそれぞれの変分を求める.

*21 もっともこの有用性が顕著に表れるのは, Hamilton 形式の解析力学であろう.

*22 このとき, $J[y]$ が極値をとるための必要条件として, 明らかに $[a, c], [c, b]$ で Euler 方程式が成り立つ.

$y(x)$ は $x = a, x = b$ の両端点で固定されるが $x = c$ では制約が課されないので, $y(x)$ が停留曲線であるとき, 以下の式が成り立つ.*23

$$\delta J_1 = \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=c-0} \delta y_1 + \left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) \Big|_{x=c-0} \delta x_1, \quad -\delta J_2 = \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=c+0} \delta y_1 + \left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) \Big|_{x=c+0} \delta x_1$$

ここで, $y(x)$ が極値をとるとき $\delta J = \delta J_1 + \delta J_2$ が成り立ち, $\delta x_1, \delta y_1$ は任意であるから以下の2つの式を得る.

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=c-0} - \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=c+0} = 0, \quad \left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) \Big|_{x=c-0} - \left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) \Big|_{x=c+0} = 0$$

これらは極値曲線の角点が満たす条件であり, Weierstrass-Erdmann の条件と呼ばれる.

つまり, この変分問題を解くためには $[a, c], [c, b]$ でそれぞれの Euler 方程式を解き, その一般解に含まれる4つの任意定数を Weierstrass-Erdmann の条件から求めればよい.

また, これらの条件は正準変数をもってより簡潔に表され, 明らかに $p = \frac{\partial F}{\partial y'}$ と $H = -F + \frac{\partial F}{\partial y'} y'$ は角点において連続であることを示している.

Weierstrass-Erdmann の条件は, 以下のように幾何学的に解釈される.

x, y を固定し, y' の関数として描かれた $F(x, y, y')$ を indicatrix と呼び, このとき第1の条件はこの曲線の接線が $y'(c-0)$ および $y'(c+0)$ において互いに平行になることを意味し, 第2の条件は $F|_{x=c-0} - F|_{x=c+0} = \frac{\partial F}{\partial y'} y' \Big|_{x=c+0}$ よりこの2つの接線が平行であるばかりでなく, 一致することを示している.

このとき, 以下の定理が成り立つ.

【Theorem】

曲線 $y(x)$ が $J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ に極値を与え, すべての有限な z に対して $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y(x), z) > 0$ を満たすならば, $y(x)$ は2回微分可能である.

証明 $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y(x), z) > 0$ より indicatrix としての F は凸であり, 凸関数の異なる接線どうしは一致しえないから, 停留曲線は折れ線ではない.

よって $y(x)$ はなめらかな曲線であり, それに沿って $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y(x), z) > 0$ ならばその各点で $y''(x)$ が存在する. □

*23 $x = c$ で $y(x)$ は連続であるので, δJ_1 と δJ_2 に含まれる $\delta x_1, \delta y_1$ はそれぞれ同じである.

2 代表的な変分問題

2.1 直線の性質

ある2点を結ぶ曲線族のうち、その長さが最短となるようなものが直線であることは直観的に明らかであるが、変分法を用いて証明することもでき、この問題は基本問題の典型例として有名である。

まず、2つの固定点の x 座標を x_0, x_1 ($x_0 < x_1$) とすれば、このとき曲線 $y(x)$ の長さは $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2} dx$ という汎関数で与えられる。

ここで、この汎関数の変関数が1つであることに留意すれば鞍点が存在しないことは明らかであり、今回の場合では最長な曲線は存在しないので、停留性と最小性は同義である。すなわち、Euler 方程式の解曲線が求める曲線となる。

よって、Euler 方程式より

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) = 0$$

となるので $y' = \text{const.}$ が得られ、これを満たすものは直線である。

2.2 懸垂線の方程式

静力学ではポテンシャルは停留するから、線密度を ρ とし懸垂線のポテンシャルを表す $\int_{x_1}^{x_2} \rho g y \sqrt{1 + (y')^2} dx$ の極値問題を解けばよい。^{*24}

このとき、Euler 方程式は以下のようにになる。

$$\begin{aligned} \rho g \sqrt{1 + (y')^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\rho g y y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1 + (y')^2)^2 - ((y')^2 + y y'')(1 + (y')^2) + y (y')^2 y'' = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - y y'' + (y')^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{y^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{y} \right) = 0 \\ &\Rightarrow \quad -\frac{1}{2y^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{y'}{y} \right)^2 = -\frac{C}{2} \quad (C \in \mathbf{R}) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{C y^2 - 1}} = \pm dx \end{aligned}$$

ここで $\sqrt{C}y = \cosh t$ とすれば $\frac{1}{\sqrt{C}} dt = \pm dx$ のように書き換えられるから、 $t = \pm \sqrt{C}x + D$ ($D \in \mathbf{R}$) を得る。よって、懸垂線の方程式は以下の双曲線関数で表される。

$$y = \frac{1}{\sqrt{C}} \cosh(\pm \sqrt{C}x + D) \quad (C, D \in \mathbf{R})$$

2.3 最速降下線問題

最速降下線問題は Johann Bernoulli によって提唱された問題であり、質点が転がり落ちるに要する時間が最小となるような曲線を求める問題である。

まず、エネルギー保存則より質点の速さは $\sqrt{2gy}$ で表され、微小時間 dt は $dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy}}$ のように表されるので、質

^{*24} $\mathbf{F} = -\text{grad}U$ を用いれば自明であるようにも思えるが、具体的に $\delta U = 0$ を得る手法は第3章で説明する。

点が転がり落ちるに要する時間は $T = \int_0^x \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}} dx$ となり, このときの Euler 方程式は以下のように計算される.*25

$$\begin{aligned} & \sqrt{1+(y')^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{y}} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{1+(y')^2} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & -\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y^3}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & -\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{2\sqrt{y^3}} + \frac{y'}{2\sqrt{y^3}} \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \left(\frac{y''}{\sqrt{1+(y')^2}} - \frac{(y')^2 y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & -(1+(y')^2)^2 + (y')^2(1+(y')^2) - 2yy''(1+(y')^2) + 2y(y')^2 y'' = 0 \\ \Leftrightarrow & -1 - (y')^2 - 2yy'' = 0 \\ \Leftrightarrow & y' + \frac{d}{dx}(y(y')^2) = 0 \end{aligned}$$

この式の両辺を x で積分すれば $y + y(y')^2 = C$ ($C \in \mathbf{R}$) が得られ, 変数分離すれば $\sqrt{\frac{y}{C-y}} dy = dx$ となる. ここで $y = CY$, $x = CX$ とおけば $X = \int \sqrt{\frac{Y}{1-Y}} dY$ が得られ, $Y = \sin^2 \theta$ とすれば以下を得る.

$$X = \int \tan \theta \cdot 2 \cos \theta \sin \theta d\theta = \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta + C' \quad (C' \in \mathbf{R})$$

さらに, $\theta = 0$ のとき $x = y = 0$ なので $C' = 0$ となり, $2\theta = \alpha$ として変数を x, y に戻せば以下のようになる.

$$x = C \frac{\alpha - \sin \alpha}{2}, \quad y = C \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

この任意定数 C は到着点 $x = x_1, y = y_1$ において $\frac{x_1}{y_1} = \frac{\alpha_1 - \sin \alpha_1}{1 - \cos \alpha_1}$ が成り立つことから決定され, この関数はいわゆるサイクロイド曲線を表している.

2.4 極小曲面

与えられた閉曲線上に張られる面積最小の曲面を求める.

このとき, 汎関数 $J[z] = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$ の停留に関して以下のように Euler 方程式が与えられる.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \right) - 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \right) = 0$$

ここで, 曲面の基本形式の係数は以下のようになる.

$$E = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2, \quad F = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}, \quad G = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

$$L = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \quad M = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \quad N = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

このとき, 平均曲率は以下のように計算される.

$$H \equiv \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \right) - 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \right)}{2\sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \right)^3}}$$

よって, 曲面の面積が最小であるための必要条件として $H = 0$ が成り立ち, このようにすべての点で平均曲率が 0 となるような曲面を極小曲面 (minimal surface) と呼ぶ.

*25 今回の場合も, 停留と最小の同値性については「直線の性質」と同様である.

2.5 測地線問題

ある曲面上の2点を結ぶ最短距離の曲線を測地線 (geodesics) と呼ぶ。

この曲線は $u = u(t)$, $v = v(t)$ のようにパラメータ表示^{*26}され、パラメータ t の t_1 と t_2 に対応する2点間の長さは、曲面の第1基本形式の非負の平方根の積分値として次のように表される。

$$J[u, v] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt \quad \left(E \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad F \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad G \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)$$

このとき、 $J[u, v]$ の Euler 方程式は、以下のようになる。

$$\frac{\frac{\partial E}{\partial u} u'^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u} u'v' + \frac{\partial G}{\partial u} v'^2}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} - \frac{d}{dt} \frac{2(Eu' + Fv')}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} = 0$$

$$\frac{\frac{\partial E}{\partial v} u'^2 + 2\frac{\partial F}{\partial v} u'v' + \frac{\partial G}{\partial v} v'^2}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} - \frac{d}{dt} \frac{2(Fu' + Gv')}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} = 0$$

例として、 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a \cos \varphi \\ a \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$ のようにパラメータ φ, z で記述された円筒上の測地線について考察する。

このとき、第1基本形式の係数は $E = a^2$, $F = 0$, $G = 1$ となるので、Euler 方程式より以下の式を得る。

$$\frac{a^2 \varphi'}{\sqrt{a^2 \varphi'^2 + z'^2}} = C_1, \quad \frac{z'}{\sqrt{a^2 \varphi'^2 + z'^2}} = C_2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbf{R})$$

ここで、これらの式の一方を他方へ代入すれば、 $\frac{dz}{d\varphi} = C$ のような形の式を得るので、この解 $z = C\varphi + A$ ($A \in \mathbf{R}$) は円筒 \mathbf{r} 上の螺旋の族となる。

2.6 等周問題

閉曲線の長さが l_1 に固定されているとき、閉曲線内の面積が最小となるような曲線を考える。

まず、閉曲線上の任意の点の位置ベクトルを $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, 線素ベクトルを $d\mathbf{l} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix}$ とすれば、閉曲線内の面積

S は次のように表される。^{*27}

$$S = \oint \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times d\mathbf{l}) = \frac{1}{2} \oint (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} (xy' - yx') dl$$

ここで、拘束条件として $x'^2 + y'^2 = 1$ が与えられるので、Lagrange の未定乗数法より極値をとるべき汎関数は以下のようになる。

$$\int_0^{l_1} \left(\frac{1}{2} (xy' - yx') + \lambda (x'^2 + y'^2 - 1) \right) dl$$

このときの Euler 方程式は、

$$\frac{1}{2} y' - \frac{d}{dl} \left(-\frac{1}{2} y + 2\lambda x' \right) = 0 \Leftrightarrow y' - 2\lambda' x' - 2\lambda x'' = 0$$

$$-\frac{1}{2} x' - \frac{d}{dl} \left(\frac{1}{2} x + 2\lambda y' \right) = 0 \Leftrightarrow -x' - 2\lambda' y' - 2\lambda y'' = 0$$

^{*26} いま考えている曲面は $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ で表されるものとする。

^{*27} l に関する微分演算をプライム記号で表している。

のように書き換えられるので, 再び拘束条件を用いれば以下の式を得る.

$$\begin{aligned} -2\lambda'(x'^2 + y'^2) - 2\lambda(x'x'' + y'y'') = 0 &\Leftrightarrow -2\lambda'(x'^2 + y'^2) - 2\lambda\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dl}(x'^2 + y'^2)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow -2\lambda' = 0 \end{aligned}$$

よって, $\lambda' = 0$ より $y - 2\lambda x' = C_1$, $-x - 2\lambda y' = C_2$ ($C_1, C_2 \in \mathbf{R}$) が得られ, これを $x'^2 + y'^2 = 1$ に代入すれば以下の式を得る.

$$(x + C_2)^2 + (y - C_1)^2 = 4\lambda^2$$

すなわち, 半径 2λ の円である.

3 解析力学への導入

3.1 Lagrange 方程式と最小作用の原理

解析力学 (analytical mechanics) では運動の 3 法則に代わって、最小作用の原理を運動の基本原理として採用する。解析力学の創始者である Lagrange は、静力学の法則を動力学に拡張することでこの原理を構築した。本資料では、この方法に沿って作用の停留を演繹する。

3.1.1 仮想仕事の原理の拡張

【Theorem】 仮想仕事の原理 (principle of virtual work)

静力学では物体にかかる合力 \mathbf{F} が 0 であることから、仮想変位 $\delta\mathbf{x}$ に対して以下の式が成り立つ。

$$\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{x} = 0$$

Newton 力学によれば、動力学では運動方程式 $\mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{x}} = 0$ が成り立つ。このとき、 \mathbf{F} の反対方向に $m\ddot{\mathbf{x}}$ だけ力がかかっているような慣性系をとれば、動力学を静力学と同様に扱うことができる。^{*28} よって、仮想仕事の原理は以下のように拡張される。

【Theorem】 仮想仕事の原理の拡張

すべての力学に対して、以下の式が成り立つ。

$$(\mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{x}}) \cdot \delta\mathbf{x} = 0$$

3.1.2 最小作用の原理の導出

いま、物体にかかっている力が保存力であるとすれば $\mathbf{F} = -\text{grad } U$ が成り立つので、仮想仕事の原理はポテンシャルの停留 $\delta U = 0$ に帰着される。

ここで、前述した仮想仕事の原理の拡張式がある物理量 S の停留に帰着されれば、物体の運動は S が停留するように決まるといえる。^{*29}

いま、多質点系において \mathbf{x}_i が一般化座標 q_i の関数で表されるとすれば、^{*30}

$$(\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{x}}_i) \cdot \delta\mathbf{x}_i = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{x}}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0$$

ここで、変換則 $\dot{\mathbf{x}}_i = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \Rightarrow \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k}$, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \dot{q}_j}$ より、

$$\mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} = - \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{x}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - \dot{\mathbf{x}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (\dot{\mathbf{x}}_i^2)}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial (\dot{\mathbf{x}}_i^2)}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial (\dot{\mathbf{x}}_i^2)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial (\dot{\mathbf{x}}_i^2)}{\partial q_k}$$

が得られるので、 $L \equiv T - U$ (T :運動エネルギー, U :ポテンシャル) と定義すれば、

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{x}}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0 &\Leftrightarrow - \frac{\partial U}{\partial q_k} \delta q_k - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \right) \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 \delta q_k = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \right) \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 - U \right) \delta q_k = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k = 0 \end{aligned}$$

^{*28} この着想を、d'Alembert の原理と呼ぶ。

^{*29} 以下では、普遍的な座標系として一般化座標 (generalized coordinates) を導入する。ここで一般化座標とは、自由度 N の系において N 個だけ定まる変数であり、力学変数とも呼ばれる。

^{*30} index k は縮約規則に基づいて和をとっている。

の形に帰着し、この両辺を時間積分すれば $\delta S = 0$ の形に帰着する。

よって、以下の法則が成り立つ。

最小作用の原理 (principle of least action)

2つの時刻 t_1, t_2 ($t_1 < t_2$) における q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) の値を指定したとき、 $t_1 < t < t_2$ における系の運動、すなわち時間の関数 $q_i(t)$ は、

作用 (action) : $S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt$

が停留するように決まる。^a

^a このときの L は $L \equiv T - U$ で定義され、Lagrangian と呼ばれる。

解析力学では、Newton の 3 法則ではなく最小作用の原理を運動の基本法則として採用する。^{*31}

また、作用の停留に対する Euler 方程式を Lagrange 方程式と呼び、Lagrange 方程式は運動方程式に対応する。

このとき、Lagrangian は座標変換によって (形こそ変わるものの) 不変であり、得られた Lagrange 方程式は一般化座標の形で書かれているため、Lagrange 方程式は任意の座標変換に対して共変性 (covariance) をもつ。^{*32}

3.2 簡単な具体例

万有引力によって惑星が恒星の周りを等速円運動している状況を考える。

このとき、惑星の質量を m 、恒星の質量を r とすれば、Lagrangian は $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - G\frac{Mm}{r}$ のように表され、Lagrange 方程式より以下の運動方程式が導出される。

$$mr\ddot{\theta} + G\frac{Mm}{r^2} - m\ddot{r} = 0, \quad -2mrr\dot{\theta} - mr^2\ddot{\theta} = 0$$

3.3 対称性と保存則

3.3.1 Lagrangian の不変性

相異なる作用 q_i が等価な汎関数であれば Lagrange 方程式は不変であるため、それらは同一の運動を表す。したがって、以下では Lagrangian が (時間に関する全微分項を除いて) 不変であるならば、その運動は同一であるものとして扱う。

3.3.2 Noether の定理

一般化座標を $q_i(t) \rightarrow q_i(t) + F_i^A \epsilon_A$ のように変化させたとき、Lagrangian が (時間に関する全微分項を除いて) 不変であるならば、それに付随して Noether 不変量と呼ばれる保存量が得られることが知られている。^{*33}

ここで、index A は変換の種類を表し、縮約規則に則って和をとっている。また、 q と q' の関数 F_i^A は座標の変化を定義する量であり、 ϵ_A は微小変換パラメータである。

このとき、式変形の一部に Lagrange 方程式を用いれば、

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_i} F_i^A \epsilon_A + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{dF_i^A}{dt} \epsilon_A = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} F_i^A \epsilon_A \right)$$

が得られ、Lagrangian の変化量を $\frac{d}{dt} G^A \epsilon_A$ とすれば、以下の不変量を得る。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} F_i^A - G^A$$

^{*31} 最小作用の原理は作用の停留性を示しているが、最小性は示していない。仮に作用の第 2 変分を計算したとしても、最小性を証明するのは難しい。

^{*32} Newton の運動方程式との決定的な違いである。

^{*33} つまり系に対称性を課せば、それに付随する不変量を得る。

3.3.3 時間並進対称性とエネルギー保存則

時間並進対称性とは、任意の時間並進に対して Lagrangian が (時間に関する全微分項を除いて) 不変であることを指す。すなわち、以下のように定義される。

【Definition】 時間並進対称性

$q_i(t)$ が Lagrange 方程式の解であるならば、任意の定数 α_0 に対して $q_i(t + \alpha_0)$ もまた解である。

時間並進対称性をもつ Lagrangian は t に陽に依存しない。このことは直観的に理解しやすいが、厳密には以下のように証明される。

証明 $q(t)$ が Lagrange 方程式 $\frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t), t)}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t), t)}{\partial \dot{q}_i(t)} = 0$ の解であるとき^{*34}、時刻を $t \rightarrow t + \alpha_0$ のように変化させると、 $\frac{d}{d(t+\alpha_0)} = \frac{d}{dt}$ より以下が成り立つ。

$$\frac{\partial L(q(t + \alpha_0), \dot{q}(t + \alpha_0), t + \alpha_0)}{\partial q_i(t + \alpha_0)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q(t + \alpha_0), \dot{q}(t + \alpha_0), t + \alpha_0)}{\partial \dot{q}_i(t + \alpha_0)} = 0$$

このとき、Lagrangian が t に陽に依存しなければ、 $q_i(t + \alpha_0)$ も Lagrange 方程式の解である。□

系が時間並進対称性をもつとき、それに付随して Noether 不変量が得られる。

ここで、一般化座標が $q_i(t) \rightarrow q_i(t + \epsilon_0) \simeq q_i(t) + \dot{q}_i(t)\epsilon_0$ のように変化したとして、Lagrangian の変化量は以下のようになる。

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i \epsilon_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \epsilon_0 = \frac{d}{dt} L \epsilon_0$$

よって、Noether 不変量として $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$ が得られ、この量はエネルギーに対応する。^{*35}

3.3.4 空間並進対称性と運動量保存則

空間並進対称性とは、任意の空間並進に対して Lagrangian が (時間に関する全微分項を除いて) 不変であることを指す。すなわち、以下のように定義される。

【Definition】 空間並進対称性

任意の並進ベクトル \mathbf{a} に対して Lagrangian が次の性質をもつとき、系は空間並進対称性をもつ。

$$L(\mathbf{q}_n(t) + \mathbf{a}, \dot{\mathbf{q}}_n(t), t) = L(\mathbf{q}_n(t), \dot{\mathbf{q}}_n(t), t) + \frac{d}{dt} G(\mathbf{q}_n(t), t)$$

このとき、 G は並進ベクトル \mathbf{a} に依存する関数である。

Lagrangian が \mathbf{q}_n に依存しなければ、 $G = 0$ となり系は空間並進対称性をもつ。また、Lagrangian が $\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_m$ のように異なる質点の位置ベクトルの差に依っていたとすれば同様に $G = 0$ となり系は空間並進対称性をもつ。

系が空間並進対称性をもつとき、それに付随して Noether 不変量が得られる。

N 質点系において、位置ベクトルがそれぞれ $\mathbf{x}_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots, N$) で表されるとする。

このとき、系の Lagrangian が空間並進に対して厳密に不変であるとすれば、並進ベクトルを ϵ として、Noether の定理における諸量は以下のようになる。^{*36}

$$q_i \rightarrow (\mathbf{x}_n)_{i=1,2,3}, \quad \epsilon_A \rightarrow \epsilon_j, \quad G^A \rightarrow 0$$

また、 F_i^A は $F_{(n,i)}^j$ として書き表され、座標の変化が $\mathbf{x}_n(t) \rightarrow \mathbf{x}_n(t) + \epsilon$ で表されることから、 $F_{(n,i)}^j = \delta_{ij}$ が成り立つ。

^{*34} $q_1(t), \dots, q_n(t)$ を $q(t)$ と表記した。

^{*35} このことは容易に確かめられる。

^{*36} n は質点の種類を表し、 i は Descartes 座標系における成分を表す。また、 j は空間並進の方向である。

よって、 j 方向の空間並進対称性に対応した保存量として以下を得る。^{*37}

$$P_j = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial (\dot{\mathbf{x}}_n)_i} F_{(n,i)}^j = \sum_{n=1}^N \frac{\partial L}{\partial (\dot{\mathbf{x}}_n)_j}$$

この保存量を運動量 (momentum) と呼び、各運動量を成分とする運動量ベクトルを用いれば $\mathbf{P} = \sum_{n=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_n}$ となる。

3.3.5 空間回転対称性と角運動量保存則

空間回転対称性とは、任意の空間回転に対して Lagrangian が (時間に関する全微分項を除いて) 不変であることを指す。すなわち、以下のように定義される。

【Definition】 空間回転対称性

任意の回転行列 R に対して Lagrangian が次の性質をもつとき、系は空間回転対称性をもつ。

$$L(R\mathbf{q}_n(t), \dot{\mathbf{q}}_n(t), t) = L(\mathbf{q}_n(t), \dot{\mathbf{q}}_n(t), t) + \frac{d}{dt}G(\mathbf{q}_n(t), t)$$

このとき、 G は回転行列 R に依存する関数である。

一般に、任意の 2 つのベクトルの内積は空間回転のもとに不変である。^{*38}

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i \rightarrow R_{ij} A_j + R_{ik} B_k = \delta_{jk} A_j B_k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

よって、Lagrangian が $\mathbf{q}_n \cdot \mathbf{q}_m$, $\dot{\mathbf{q}}_n \cdot \dot{\mathbf{q}}_m$, $\mathbf{q}_n \cdot \dot{\mathbf{q}}_m$ のいずれかに依存するとき、系は空間回転対称性をもつ。

1 質点系においてこの条件に該当する Lagrangian の例として、中心力ポテンシャル $U(r)$ をもつ $L = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{x}})^2 - U(r)$ が挙げられる。^{*39}

系が空間回転対称性をもつとき、それに付随して Noether 不変量が得られる。

ここで回転行列を用いることは難しいので、回転軸を $\delta\varphi$ としたときに位置ベクトルが $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \delta\varphi \times \mathbf{x}$ のように変化することを空間回転とする。^{*40}

このとき、空間回転の成分表示は $x_i \rightarrow x_i + \epsilon_{ijk} \delta\varphi_j x_k$ となり、Lagrangian が厳密に不変であるとすれば、Noether の定理における諸量は以下ようになる。^{*41}

$$q_i \rightarrow x_i, \quad F_i^A \rightarrow \epsilon_{ijk} \delta\varphi_j x_k, \quad \epsilon_A \rightarrow \delta\varphi_j, \quad G^A \rightarrow 0$$

よって、Levi-Civita の記号の性質 $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki}$ を用いれば、 j 軸まわりの空間回転に対応した保存量として以下を得る。

$$\epsilon_{jki} x_k p_i$$

これをベクトル表記で表せば、 $\mathbf{x} \times \mathbf{p}$ となるので角運動量保存則を得る。

3.3.6 Galilei 不変性を含む 4 つの対称性を要請した場合

Galilei 不変性とは、任意の Galilei 変換に対して Lagrangian が (時間に関する全微分項を除いて) 不変であることを指す。すなわち、以下のように定義される。

^{*37} これが運動量であることは容易に確かめられ、以降、一般化座標を用いた $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ を一般化運動量と定める。

^{*38} 以下の成分表示では、縮約規則に基づいて和をとっている。

^{*39} $r = |\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}^2}$ による。

^{*40} 実際、内積と外積の巡回対称性を用いれば、 $(\mathbf{x} + \delta\varphi \times \mathbf{x})^2 = \mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x} \cdot (\delta\varphi \times \mathbf{x}) + \mathcal{O}(|\delta\varphi|^2) = \mathbf{x}^2 + \mathcal{O}(|\delta\varphi|^2)$ のように計算され、微小角 $|\delta\varphi|$ の 2 次以上の項を無視すれば、ベクトルの長さは不変となることが確認される。

^{*41} 変換の種類を表す $\text{index}A$ は、空間回転軸の方向 $j = 1, 2, 3$ となる。

【Definition】 Galilei 不変性

任意の座標系の移動速度 \mathbf{V} に対して Lagrangian が次の性質をもつとき、系は Galilei 不変性をもつ。

$$L(\mathbf{q}_n(t) - \mathbf{V}t, \dot{\mathbf{q}}_n(t) - \mathbf{V}, t) = L(\mathbf{q}_n(t), \dot{\mathbf{q}}_n(t), t) + \frac{d}{dt}G(\mathbf{q}_n(t), t)$$

このとき、 G は座標系の移動速度 \mathbf{V} に依存する関数である。

まず、系が時間並進・空間並進・空間回転の対称性をもつときに得られる Lagrangian の特徴を列挙する。^{*42}

時間並進対称性 : $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 空間並進対称性 : $L = L(\dot{\mathbf{q}}, t)$ 空間回転対称性 : $L = L(\mathbf{q}_n \cdot \mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_n \cdot \mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_n \cdot \dot{\mathbf{q}}_m)$

よって、以上の条件を満たす Lagrangian は $L = L(\dot{\mathbf{q}}^2)$ という形に定まり、以下ではこれらの諸条件に Galilei 不変性を要請した場合について考える。すなわち、以下を満たす $G(\mathbf{q}, t)$ が存在すればよい。

$$L((\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{V})^2) = L(\dot{\mathbf{q}}^2) + \frac{d}{dt}G(\mathbf{q}(t), t)$$

\mathbf{V} が \mathbf{q} に対して微小であるとすれば、この式の左辺を Taylor 展開することで以下を得る..^{*43}

$$\frac{d}{dt}G(\mathbf{q}(t), t) = -2\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{q}} \frac{dL(\dot{\mathbf{q}}^2)}{d\dot{\mathbf{q}}^2} + \mathcal{O}(\mathbf{V}^2)$$

また、 G の全微分は $\dot{\mathbf{q}}$ に関して高々 1 次であるから、 $\frac{dL(\dot{\mathbf{q}}^2)}{d\dot{\mathbf{q}}^2} = \frac{1}{2}m$ として以下が成り立つ。

$$L(\dot{\mathbf{q}}^2) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{q}}^2, \quad G(\mathbf{q}, t) = -m\mathbf{V} \cdot \mathbf{q} + \mathcal{O}(\mathbf{V}^2)$$

一般に、 \mathbf{V} が微小でなくとも得られた Lagrangian は Galilei 不変性を満足し、実際、 $L((\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{V})^2) - L(\dot{\mathbf{q}}^2)$ は時間に関する全微分項となる。

$$L((\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{V})^2) - L(\dot{\mathbf{q}}^2) = \frac{1}{2}m(-2\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}^2) = \frac{d}{dt} \left(-\mathbf{V} \cdot \mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{V}^2 t \right)$$

つまり、1 質点系に対してこれら 4 つの対称性を要請すれば外力のはたらかない自由質点の Lagrangian が得られ、ここで用いられている Galilei 変換は Newton の慣性の法則を表す。

3.4 Legendre 変換

$f(\xi)$ が狭義の凸関数である、すなわち $f''(\xi) > 0$ を満たすものとする。^{*44}

このとき、独立変数 ξ を $p \equiv f'(\xi)$ に変換すれば、 f の独立変数が f に陰に依存してしまう。

ここで、変数変換後の f を表す関数として p の関数 $H(p) \equiv p\xi - f(\xi)$ が与えられ、この一連の変換を Legendre 変換と呼ぶ。

ちなみに条件より $p'(\xi) \neq 0$ が成り立つため接線の勾配によって曲線上の点が一意に定まり、それゆえ ξ が p で表され、 $H(p)$ の有効性が示される。

$dH = -f'(\xi)d\xi + p d\xi + \xi dp = \xi dp$, $f''(\xi) > 0$ より $\frac{d^2 H}{dp^2} = \frac{d\xi}{dp} = \frac{1}{f''(\xi)} > 0$ が成り立つので、 $H(p)$ も狭義の凸関数である。

また、 $\frac{dH}{dp} = \xi$, $-H(p) + \xi p = f(\xi)$ が成り立つことから Legendre 変換は対合的である。

3.5 Hamiltonian の導入と正準方程式

Lagrangian の変数である一般化速度を一般化運動量に変換するとき、Legendre 変換を用いる。

$$H(q_i, p_i, t) = p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

^{*42} このとき、Lagrangian は厳密に不変であるとする。

^{*43} この式では、 $\dot{\mathbf{q}}^2$ に関する微分演算を行っている。

^{*44} $f''(\xi) < 0$ の場合も同様に議論される。

変換後のこの量を Hamiltonian と呼び、Hamiltonian はエネルギーを表す。

ここで、Hamiltonian を用いて作用の変分を計算すれば、以下のようなになる。

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} ((p_i + \delta p_i)(\dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) - H(q_i + \delta q_i, p_i + \delta p_i, t) - p_i \dot{q}_i + H(q_i, p_i, t)) dt \\ &\simeq \int_{t_1}^{t_2} \left((p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i) - \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta q_i \left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \delta p_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \right) dt + [p_i \delta q_i]_{t_1}^{t_2} = 0\end{aligned}$$

よって、以下の正準方程式 (canonical equations) を得る。

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

3.6 位相空間 (phase space)

q_i, p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) からなる $2n$ 次元の空間を位相空間 (phase space) と呼ぶ。^{*45}

系の時間発展に伴って t をパラメータとした軌跡が位相空間内に描かれ、これを位相空間軌跡 (phase space orbit) と呼ぶ。

ここで位相空間軌跡の接ベクトルは (\dot{q}_i, \dot{p}_i) となり、正準方程式を用いればこれは Hamiltonian が時間に陽に依存しないときの $\text{grad}H$ と直交するため、系に時間並進対称性が課されれば、たしかに Hamiltonian は保存される。

また、Hamiltonian が時間に陽に依存すれば接ベクトルは一意に定まらないので、位相空間軌跡は交わることがある。

3.7 正準変換と Poisson bracket

3.7.1 Poisson bracket

以下のように Poisson bracket を導入する。^{*46}

【Definition】 Poisson bracket

$$\{A, B\} \equiv \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i}$$

Poisson bracket を用いると正準方程式は $\dot{p} = \{p, H\}$, $\dot{q} = \{q, H\}$ のように表される。

また、一般化座標あるいは一般化運動量の左から Poisson bracket をとることは、それぞれ以下の微分演算を表す。

$$\{A, q_i\} = -\frac{\partial A}{\partial p_i}, \quad \{A, p_i\} = \frac{\partial A}{\partial q_i}$$

そして、関数 $A(q_i, p_i, t)$ の時間微分は以下のように記述される。

$$\frac{d}{dt} A = \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial A}{\partial t} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

このように、右から Hamiltonian との Poisson bracket をとることが時間発展に対応する。

また、Poisson bracket は偏微分を用いた微分演算子であることから、以下が成り立つ。

【Theorem】 Poisson bracket の性質

- (反対称性) $\{A, B\} = -\{B, A\}$
- (双線形性) $\{\alpha A + \beta B, C\} = \alpha\{A, C\} + \beta\{B, C\}$, $\{A, \beta B + \gamma C\} = \beta\{A, B\} + \gamma\{A, C\}$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$)
- (Leibniz 則) $\{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\}$, $\{AB, C\} = \{A, C\}B + A\{B, C\}$
- (Jacobi 恒等式) $\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$

^{*45} topological space とは別の概念である。

^{*46} index i について和をとっている。

3.7.2 正準変換

Lagrange 方程式は任意の座標変換に対して共変であるが、正準方程式にその保証はない。

そこで正準方程式が共変に保たれるような位相空間内の座標変換を正準変換 (canonical transformation) と呼ぶ。

【Theorem】 正準変換とヤコビアン

正準変換 $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$ のヤコビアンは 1 である。

証明 変数変換において、 $\begin{pmatrix} dq_i \\ dp_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial Q_i} & \frac{\partial q_i}{\partial P_i} \\ \frac{\partial p_i}{\partial Q_i} & \frac{\partial p_i}{\partial P_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dQ_i \\ dP_i \end{pmatrix}$ が成り立つ。

また、変換のヤコビアンを J とすれば、逆行列を求めることで $\begin{pmatrix} dq_i \\ dp_i \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial p_i} & -\frac{\partial Q_i}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial P_i}{\partial q_i} & \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dQ_i \\ dP_i \end{pmatrix}$ を得るので、

$$\frac{dP_i}{dt} = \frac{\partial P_i}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial P_i}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = -J \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial p_i}{\partial Q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = -J \frac{\partial H}{\partial Q_i}$$

が得られ、^{*47} 変換が正準変換であるための必要十分条件はそのヤコビアンが 1 となることである。□

また、以下の定理が成り立つ。

【Theorem】 座標変換と Poisson bracket

座標変換 $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$ に対して $\{A, B\}_{(Q_i, P_i)} \{Q, P\}_{(q_i, p_i)} = \{A, B\}_{(q_i, p_i)}$ が成り立つ。^a

^a ここで $\{Q, P\}_{(q_i, p_i)}$ は変換のヤコビアンである。

証明 $\{A, B\}_{(Q_i, P_i)}$ の第 1 項は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial Q_i} \frac{\partial B}{\partial P_i} &= \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_i} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial Q_i} \right) + \left(\frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial P_i} + \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial P_i} \right) \\ &= \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial P_i} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial Q_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial P_i} + \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial P_i} + \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial Q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial P_i} \end{aligned}$$

よって、この式の第 3 項と第 4 項が A と B で対称であることから以下を得る。

$$\begin{aligned} \{A, B\}_{(Q_i, P_i)} &= \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial P_i} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial Q_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial P_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial P_i} - \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial Q_i} \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial P_i} \\ &= \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_i} \frac{\partial p_i}{\partial P_i} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_i} \frac{\partial q_i}{\partial P_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \left(\frac{\partial p_i}{\partial Q_i} \frac{\partial q_i}{\partial P_i} - \frac{\partial q_i}{\partial Q_i} \frac{\partial p_i}{\partial P_i} \right) \\ &= \frac{1}{J} \{A, B\}_{(q_i, p_i)} \end{aligned}$$

□

よって、正準変換において Poisson bracket は保存される。

また、 P と Q による Poisson bracket を総じて fundamental Poisson bracket と呼び、正準変換ではすべての fundamental Poisson bracket が保存されることが容易に確かめられる。

3.8 正準変換の母関数

3.8.1 母関数 F

正準変換に伴って正準方程式は共変に保たれるが、Lagrangian は $p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \rightarrow P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t)$ のように変化する。^{*48}

^{*47} \dot{Q}_i も同様に示せばよい。

^{*48} K は正準変換後の Hamiltonian である。

このとき、正準変換によって運動が不変であるとすれば、その変化分は時間に関する全微分項のみとなる。

$$p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) = P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) + \frac{d}{dt} F(q, Q, t)$$

このときの $F(q, Q, t)$ を正準変換の母関数 (generating function) と呼び、この定義式を変形させれば \dot{q}_i, \dot{Q}_i の任意性より以下を得る。

$$p_i = \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial Q_i}, \quad K = H + \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial t}$$

よって、母関数 $F(q, Q, t)$ を与えると、それに対応して正準変換が定まる。

3.8.2 母関数 Φ

点変換などに見られるように、母関数 $F(q, Q, t)$ だけではすべての正準変換を表すことはできない。よって、ここでは $F(q, Q, t)$ の Legendre 変換として得られる 3 種類の母関数を新たに導入する。

F の Legendre 変換として $\Phi(q, P, t) = F(q, Q, t) + P_i Q_i$ を与える。^{*49}

このとき、 Φ の微分は次のように変形される。

$$d\Phi = \frac{\partial F}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial F}{\partial t} dt + Q_i dP_i + P_i dQ_i = p_i dq_i + Q_i dP_i + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

よって、以下を得る。

$$p_i = \frac{\partial \Phi(q, P, t)}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \Phi(q, P, t)}{\partial P_i}, \quad K = H + \frac{\partial \Phi(q, P, t)}{\partial t}$$

3.8.3 母関数 Ψ

F の Legendre 変換として $\Psi(p, Q, t) = F(q, Q, t) - p_i q_i$ を与える。

このとき、 Ψ の微分は次のように与えられる。

$$d\Psi = \frac{\partial F}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial F}{\partial t} dt - p_i dq_i - q_i dp_i = -q_i dp_i - P_i dQ_i + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

よって、以下を得る。

$$q_i = -\frac{\partial \Psi(p, Q, t)}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial \Psi(p, Q, t)}{\partial Q_i}, \quad K = H + \frac{\partial \Psi(p, Q, t)}{\partial t}$$

3.8.4 母関数 Ξ

F の Legendre 変換として $\Xi(p, P, t) = F(q, Q, t) - P_i Q_i - p_i q_i$ を与える。

このとき、母関数 F の定義式は次のように書き換えられる。

$$-q_i dp_i - H(q, p, t) dt = -Q_i dP_i - K(Q, P, t) dt + d(F(q, Q, t) + P_i Q_i - p_i q_i)$$

ここで、 $F(q, Q, t) + P_i Q_i - p_i q_i = \Xi$ であるから以下を得る。

$$q_i = -\frac{\partial \Xi(p, P, t)}{\partial p_i}, \quad Q_i = -\frac{\partial \Xi(p, P, t)}{\partial P_i}, \quad K = H + \frac{\partial \Xi(p, P, t)}{\partial t}$$

4 今後の課題

今回扱った内容は汎関数の停留についての諸問題であるが、一般に停留性は最小性を意味せず、最小性の証明にはもう少し複雑な理論が必要であるらしい。また、解析力学を用いて電磁気学や量子力学を記述してみたいとも思っているの、それらについてもぜひとも研究したい。

^{*49} ここに、右辺の Q_i は $P_i = -\frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial Q_i}$ を Q_i について解き、 (q, P, t) の関数としたものであり、以下の Ψ や Ξ の場合も同様に考えられる。

参考文献

- [1] I.M. Gelfand, S.V.Fomin, 変分法, 総合図書, 1975.
- [2] 杉浦 光夫, 解析入門 I, 東京大学出版会, 2016.
- [3] 前野 昌弘, よくわかる解析力学, 東京図書, 2017.
- [4] 畑 浩之, 基幹講座物理学 解析力学, 東京図書, 2014.
- [5] L.M.Clous, ファインマンさんの流儀, 早川書房, 2012.
- [6] 須藤 靖, 解析力学・量子論, 東京大学出版会, 2008.