アクチュアリーと数学(導入)

平成 30 年 11 月 4 日

制作: 芝浦工業大学 辻村　将吾

目 次

1　研究動機

私は, 実際にアクチュアリーのインターンシップを受けるまではアクチュアリーはどのようなことを業務とする仕事なのかを全く見当もつかなかったので今回の研究テーマにした. また, 導入と書いてあるのはインターンシップを受けたことしかまだないためにこのようなタイトルにした.

1.1　研究内容

私が実際にインターンシップを受けてどのような数学を用いているのかを学んだこととして発表していく形としていく. 今回の研究では損保アクチュアリーを対象としているために生命アクチュアリーや年金アクチュアリーについては別途参照を願いたい.

1.2　保険の種類

保険の種類には主に三つの種類が存在する. 一つは生命保険, もう一つは損害保険. 更には最近になり第三分野なるものの保険などが出てきている. それぞれの仕事の主な役割としては生命保険では主に生命表などを作成することによって保険金を設定する. 特徴的なのは人の生命を主に扱っていることである. また, 損保保険においては自動車保険や火災保険などの人以外も対象としている. 第三分野では医療保険やガン保険などこの二つを合わせたような保険になることが特徴としてある.

さて, 今回のこの研究では損保アクチュアリーにおいての話を重きをおいている. まず, 生命保険と損害保険において共通している「保険料」について用語を説明する.

(i) 純保険料 (将来の保険金支払いに充てる部分)

(ii) 代理店手数料 (代理店に支払う手数料)

(iii) 社費 (保険会社員の人件費, 契約獲得に必要な物件費)

(iv) 利潤 (保険を販売する時に見込む利益)

このうちの (2),(3),(4) は **付加保険料** と言われている. 以下では生命保険と損保保険における重要な 3 つの保険の基本原理について紹介する.

1.3　保険の基本原理

保険の基本原理の 3 つとしては以下のようなものがある.

保険の基本原理

(I) 大数の法則 $\cdots$ ある事象の起こる確率が毎回一定である時試行回数を十分大きく取りさえすればその事象の起こる相対度数は本来の確率は限りなく近づく.

(II) 収支相等の原則 $\cdots$ 危険集団の構成員が支払う純保険料の総額は, 支払い保険金の総額と等しくなければならない.(ただし現在価値に直したものである)

(III) 利率の 3 原則 $\cdots$ 低すぎず · 高すぎず · 不当に差別的ではない

このうち, 特に収支相等の原則は主に生命保険において使われることが多く, 生命アクチュアリーにおける話であることがあるために今回の研究では割愛させてもらう. 大数の法則について, 数学的に表すと以下のようになる.

定義 1.1 (大数の (強) 法則)**.** $\{X_n\}$:確率変数列 ($\mathbb{R}$-値), $m_n = E[X_n]$ として, $Y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$, $\overline{m_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k$, $\widetilde{Y_n} = Y_n - \overline{m_n}$ とおくとき, $\widetilde{Y_n}$ が 0 に概収束する. すなわち,

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \widetilde{Y_n} = 0\right) = 1$$

が成立するときに, $\{Y_n\}$ は **大数の強法則を満たす** という.

この大数の法則は, 以下のような二つの定理がどちらか一方が成立しているときに満たしている.

(i) コルモゴロフの第一定理

(ii) コルモゴロフの第二定理

まず最初にコルモゴロフの第一定理を紹介する.

定理 1.1 ((i) コルモゴロフの第一定理)**.** $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$: $\mathbb{R}$-値確率変数の列で独立. 更に, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(X_n) < \infty$ とする. このとき, $Y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ に対して大数の強法則が成立する. すなわち $\overline{m_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E[X_k]$ に対して, $Y_n \to \overline{m_n} \to 0 \quad \text{a.s.}(n \to \infty)$

証明. $E[X_n] = 0,\ n \in \mathbb{N}$ と仮定して良い. 以下, $E[X_n] = 0$ $(n \in \mathbb{N})$ とする. 手順としては以下の 3 つの Step に分けて証明をする.

Step1

$^{\forall}\varepsilon > 0$ に対して $A(\varepsilon) = \displaystyle\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|Y_n| < \varepsilon\}$ が示されることによって主張が示される. 実際,

$A = \displaystyle\bigcap_{j=1}^{\infty} A\left(\frac{1}{j}\right)$ とおくとき, $(j \in \mathbb{N})$ 各 j に対して $P\left(A\left(\dfrac{1}{j}\right)\right) = 1$ であるので, $P\left(A\left(\dfrac{1}{j}\right)^c\right) = 0$ ここで, $P(A^c) = P\left(\left(\displaystyle\bigcap_{j=1}^{\infty} A\left(\frac{1}{j}\right)^c\right)\right) = P\left(\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A\left(\frac{1}{j}\right)^c\right) \leqq \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} P\left(A\left(\frac{1}{j}\right)\right) = 0$ が成り立つ. つまり, $P(A) = 1$ が成り立つ. $w \in A$ ならば $^{\forall}j \in \mathbb{N}$ に対して $w \in A\left(\dfrac{1}{j}\right)$ である.

$$A\left(\frac{1}{j}\right) = \bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\left\{|Y_n| < \frac{1}{j}\right\}$$

であるので, $w \in A\left(\dfrac{1}{j}\right)$ である時に

$$^{\exists}N(j) \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad n > N(j) \Rightarrow |Y_n| < \frac{1}{j}$$

ゆえに $w \in A$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} Y_n(w) = 0$

Step2

実際に, $A(\varepsilon)=\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\{|Y_n|<\varepsilon\}$ とおく時に $P(A(\varepsilon))=1$ であることを示す. まず最初に, 次のような集合を考える.

$$B_m(\varepsilon)=\bigcup_{n=2^{m-1}}^{2^m-1}\{|Y_n\geqq\varepsilon\}=\left\{\max_{2^{m-1}\leqq n\leqq 2^m-1}|Y_n|\geqq\varepsilon\right\}=\left\{\max_{2^{m-1}\leqq n<2^m}|Y_n|\geqq\varepsilon\right\}$$

とおくと, ${}^{\forall}l\in\mathbb{N}$ に対して

$$A(\varepsilon)^c=\left(\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\{|Y_n|<\varepsilon\}\right)^c=\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|Y_n|\geqq\varepsilon\}$$

であり, さらに以下のような包含関係が成り立つ.

$$A(\varepsilon)^c=\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|Y_n|\geqq\varepsilon\}\subset\bigcup_{m=l}^{\infty}B_m(\varepsilon)=\bigcup_{m=l}^{\infty}\left\{\max_{2^{m-1}\leqq n<2^m}|Y_n|\geqq\varepsilon\right\}$$

よって, $P(A(\varepsilon)^c)=0$ を示すためにはボレルカンテリの補題によると $\sum_{m=1}^{\infty}P(B_m(\varepsilon))<\infty$ を示せれば十分. ここで, ボレルカンテリの補題について補足をする.

補題 1 (ボレルカンテリの補題)**.** $A_n\in\mathscr{F}$($\mathscr{F}$ は Ω を構造を持たない集合として $\mathscr{P}(\Omega)$ をその部分集合全体とした時に $\mathscr{F}\subset\mathscr{P}(\Omega)$ を満たすような集合) に対して $\lim_{n\to\infty}\sup A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n$ と定義する. この時に以下の 2 条件を満たす.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty$ ならば $P\left(\lim_{n\to\infty}\sup A_n\right)=0$

(2) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ が独立で, $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\infty$ ならば $P\left(\lim_{n\to\infty}\sup A_n\right)=1$

Step3

従って $\sum_{m=1}^{\infty}P(B_m(\varepsilon))<\infty$ を示すために $P(B_m(\varepsilon))$ を評価する. $Z_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ とおく.

$$\begin{aligned}
P(B_m(\varepsilon))&=P\left(\max_{2^{m-1}\leqq n<2^m}|Y_n|\geqq\varepsilon\right)\\
&=P\left(\max_{2^{m-1}\leqq n<2^m}\frac{1}{n}|Z_n|\geqq\varepsilon\right)\\
&\leqq P\left(\max_{2^{m-1}\leqq n<2^m}\frac{1}{2^{m-1}}|Z_n|\geqq\varepsilon\right)\\
&=P\left(\max_{2^{m-1}\leqq n<2^m}|Z_n|\geqq\varepsilon\cdot 2^{m-1}\right)\\
&\leqq P\left(\max_{1\leqq n<2^m}|Z_n|\geqq\varepsilon\cdot 2^{m-1}\right)\\
&\leqq\frac{1}{(\varepsilon\cdot 2^{m-1})^2}\sum_{k=1}^{2^m}\mathrm{Var}(X_k)\quad(\because \text{コルモゴロフの不等式})\\
&=\frac{4}{\varepsilon^2\cdot 2^{2m}}\sum_{k=1}^{2^m}\mathrm{Var}(X_k)
\end{aligned}$$

従って, これらはまとめると

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(B_m(\varepsilon)) \leqq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^2 \cdot 2^{2m}} \sum_{k=1}^{2^m} \mathrm{Var}(X_k)$$

さらに右辺を展開することによって

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^2 2^{2m}} \sum_{k=1}^{2^m} \mathrm{Var}(X_k) &= \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^m} \frac{\mathrm{Var}(X_k)}{2^{2m}} \\ &= \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(X_k)}{2^{2m}} \mathbb{1}\{k \leqq 2^m\}\end{aligned}$$

ただしここで,

$$\mathbb{1}\{k \leqq 2^m\} \begin{cases} 1 \quad (k \leqq 2^m) \\ 0 \text{ (otherwise)} \end{cases}$$

であるとする.

$$\begin{aligned}\text{上式} &= \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_k) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}} \mathbb{1}\{k \leqq 2^m\} \\ &= \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_k) \sum_{m=m_k}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}} \quad (m_k \text{は } 2^{m_k - 1} \leqq k \leqq 2^{m_k} \text{ を満たすような整数})\end{aligned}$$

ここで, 無限等比級数の公式によって

$$\sum_{m=m_k}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}} = \frac{2^{2-2m_k}}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^{2m_k}} \leqq \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{k^2} \quad (\because\ k \leqq 2^{m_k})$$

従って,

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} P(B_m(\varepsilon)) &\leqq \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_k) \cdot \sum_{m=m_k}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}} \\ &\leqq \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_k) \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{16}{3\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(X_k)}{k^2} < \infty \quad \text{(仮定より)}\end{aligned}$$

よって Step1 $\sim$ Step3 によって題意は示される. □

次に, コルモゴロフの第二定理も紹介する.

定理 1.2 ((ii) コルモゴロフの第二定理)**.** $\{X_n\}$:独立で同じ確率分布に従う確率変数. 期待値 $E[X_n] = m < \infty$. この時, $Y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ に対して大数の法則が成立する.

証明. $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $E[X_n] = 0$ と仮定しても良いため $E[X_n] = 0$ と仮定する. また, X を X_n と同じ確率分布を持つ確率変数としてその確率分布を P_X とする. この証明もまた Step1 から Step3 までに分けて証明を行う.

Step1

$k \in \mathbb{N}$ に対して, $Z_k = X_k \cdot \mathbb{1}[-k,k] - \widetilde{m_k}$(ただし $\widetilde{m_k} = E[X\mathbb{1}[-k,k]\,(X)]$) とした時に $\{Z_k\}_{k=1}^{\infty}$ はコルモゴロフの第一定理の仮定を満たすことを示す. 実際, $\{Z_k\}$ は独立である.

従ってあとは $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\mathrm{Var}(Z_k) < \infty$ であることを示す. 分散の定義によって

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}(E[Z_k^2] - E[Z_k]^2)$$

を考える. $E[Z_k] = 0$ である. 実際, $E[Z_k] = E[X_k \cdot \mathbb{1}[-k,k]] - E[X \cdot \mathbb{1}[-k,k]] = 0$ 従って上式の分散の定義は $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}E[Z_k^2]$ のみが残りさらにこれは

$$\sum_{k=1}^{\infty} E[Z_k^2] \leqq \sum_{k=1}^{\infty} E[X_k \cdot \mathbb{1}[-k,k](X_k)^2]$$

として考えることができ, 不等式の右辺の値が有限であるならば示せる. 従って, 右辺についてさらに考察をしていくと

$$\begin{aligned} E[(X_k \cdot \mathbb{1}[-k,k](X_k))^2] &= \int_{|x| \leqq k} x^2 P_X(dx) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \int_{\{x:j-1<|x|\leqq j\}} x^2 P_X(dx) \end{aligned}$$

ここで, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\mathrm{Var}(Z_k)$ を考えると

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\mathrm{Var}(Z_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{j=1}^{k} \int_{\{x:j-1<|x|\leqq j\}} x^2 P_X(dx) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{j-1<|x|\leqq j} x^2 P_X \cdot \mathbb{1}\{j \leqq k\} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\{x:j-1<|x|\leqq j\}} x^2 P_X(dx) \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{k^2}\mathbb{1}\{j \leqq k\} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\{x:j-1<|x|\leqq j\}} x^2 P_X(dx) \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ &= \int_{\{x:0<|x|\leqq 1\}} x^2 P_X(dx) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{j=2}^{\infty} \int_{\{x:j-1<|x|\leqq j\}} x^2 P_X(dx) \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ &\leqq \int_{\{x:0<|x|\leqq 1\}} x^2 P_X(dx) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{j=2}^{\infty} \int_{\{x:j-1<|x|\leqq j\}} \frac{x^2}{j-1} P_X(dx) \end{aligned}$$

従って, これらのことによって

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\mathrm{Var}(X_k) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} + \sum_{j=2}^{\infty} \int_{\{x:j-1<|x|\leqq j\}} 2|x|P_X(dx) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + 2\int_{\mathbb{R}} |x|P_X(dx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + 2E[|x|] < \infty$$

従ってコルモゴロフの第一定理の仮定を満たすことを示せた. つまり

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Z_k=0 \quad \text{a.s.}$$

Step2

$|X\cdot\mathbb{1}[-k,k](X)|\leqq|X|$ であることにより Lesbegue の収束定理によると, $\widetilde{m_k}=E[X\cdot\mathbb{1}[-k,k](X)]$ で極限をとると

$$\lim_{k\to\infty}\widetilde{m_k}=\lim_{k\to\infty}E[X\cdot\mathbb{1}[-k,k](X)]=E[\lim_{k\to\infty}X\mathbb{1}[-k,k](X)]=E[X]=0$$

よって $\lim_{k\to\infty}\widetilde{m_k}=0$ である. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{m_k}=\lim_{n\to\infty}\widetilde{m_n}=0$ さらに Step1 の結果によって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Z_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k\cdot\mathbb{1}[-k,k](X_k)-\widetilde{m_k})$$

であり先ほどの結果と合わせせると $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}:\mathbb{1}[-k,k](X_k)=0 \quad \text{a.s.}$

Step3

$$P\left({}^{\#}\{k:|X_k|>k\}<\infty\right)=1$$

を満たす k の個数を表す.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}P(|X_k|>k)&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}(j<|X|\leqq j+1)\\&=\cdots\\&=\sum_{j=1}^{\infty}P(j<|X|\leqq j+1)\\&=\sum_{j=1}^{\infty}E[\mathbb{1}(j,j+1](X)]\\&\leqq E[|X|]<\infty\end{aligned}$$

ボレルカンテリの補題により

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{|X_k|>k\}\right)=0$$

これの補集合を考えると

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\{|X_k|\leqq k\}\right)=1$$

つまり. ${}^{\exists}N\in\mathbb{N}\quad \text{s.t.}\quad k\geqq n\Rightarrow|X_k|\leqq k$ これは確率 1 で $|X_k|>k$ が有限個の k に対してのみ成立していることを示しているため

$$P\left({}^{\#}\{k:|X_k|>k\}<\infty\right)=1$$

また, 最終的な目標は $P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k=0\right)=1$ である.

従って, $P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\mathbb{1}[-k,k](X_k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=1$ が示せれば良い. 今, $|X_k|>k$ となる k の個数は確率 1 で有限であるすなわち $\mathbb{1}[-k,k](X_k)=0$ となる k の個数は確率 1 で有限である. つまり $^\exists N\in\mathbb{N}\quad \text{s.t.}\quad k\geqq N\Rightarrow X_k=X_k\mathbb{1}[-k,k](X_k)$ である. $n\geqq N$ である時には

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\mathbb{1}[-k,k](X_k)\right|=\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N}(X_k-X_k\mathbb{1}[-k,k](X_k))\right|\to 0\quad(n\to\infty)$$

□

このように, アクチュアリーには様々な数学の要素がある. この大数の法則は生命アクチュアリーまたは損保アクチュアリーで実際に使用されているものでこの法則が成り立つ時というのが日常的でも多く一般的であることが多い. 次に損保アクチュアリーの実際の業務内容を参考にしながら使われている数学を紹介していきたいと思う.

2 損保アクチュアリーでの数学

2.1 損保アクチュアリーの基本的な知識

損保アクチュアリーの業務を説明するために基本的な損害保険の用語を説明する.

損害保険用語集

- 保険金 $\cdots$ 保険事故により損害が生じた時に保険者が被保険者に払う金銭
- 保険金額 $\cdots$ 保険金の限度額
- 保険料率 $\cdots$ 保険金額における保険料の割合
- 保険料 $\cdots$ 被保険者の損害を保証するための対価として保険者に支払う金銭
- 免責事由 $\cdots$ 保険金が支払われない理由
- 損害率 $\cdots$ $\dfrac{\text{保険金}}{\text{保険料}}$
- 保険契約者 $\cdots$ 保険契約を申し込み保険契約を締結するものをいい, 保険料の支払い義務を負う.
- 保険者 $\cdots$ 保険事故が発生した時に保険金の支払い義務を負う者

などなど基本的な用語がある. 次に, 損保アクチュアリーが主に担う仕事を紹介していく. 損保アクチュアリーの仕事としては主に以下のような 5 つの仕事がある.

損保アクチュアリーのお仕事

- 商品関連 ··· 商品設計, 保険料率の算出, 収支分析 · 管理
- 経理 ··· 責任準備金の計算, 支払準備金の計算
- リスク管理 ··· リスク評価 · 分析収支見込作成
- 再保険 ··· 再保険スキームの企画 · 立案, 再保険料率の算出
- その他 ··· 保険計理人, 経営計画の策定など

今回扱うのは, この仕事のうちの「再保険」についてこのインターンシップなどを通じて学んだことを発表する.

2.2 再保険

再保険とは, 簡単にまとめると「保険会社のための保険」である. 以下にそのイメージ図をのせる. 実際

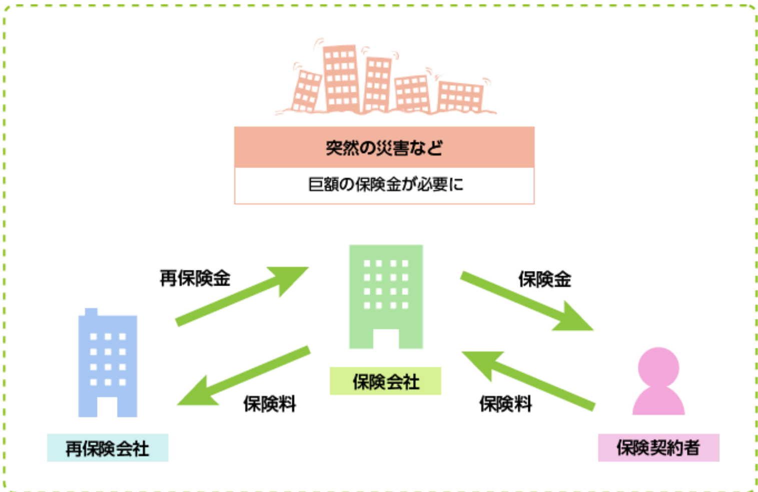


図 1: 再保険の際のイメージ図

に具体的な数値を出すことによって例をあげると

例 2.1. 出再割合を 20% とし (出再割合とは再保険をする際の様々な料金の割合) さらに再保険付加率を 5% とする.(再保険料を計算するに当たって必要になる)

さらに, 収入保険料を 12000 億円とし, 保険金が 7200 億円発生したとする. イメージ図にある通り, 顧客が保険料を支払い, 保険会社が再保険料を再保険会社に支払う. さらに, 再保険会社は再保険金を保険会社に支払い, 保険会社は顧客に保険金を支払う.

よって, 保険料および保険金を計算する際にこの出再割合と再保険付加率が必要になる. 実際にこれらの値を計算すると

(i) 再保険料

- 収入保険料を 12000 億円とする.
- 収入保険料の 20% に再保険付加率 5% を加えて再保険料を算出すると, $1200\times0.2\times(1.05)=2520$ 億円

(ii) 再保険金

- 保険金の支払いが 7200 億円発生.
- 支払う保険金の 20% が再保険金となる. つまり $7200\times 0.2=1440$ 億円となる.

さて, 今回の例においては出再割合はあらかじめ決まっていたが実際そのようなケースは稀である. よってアクチュアリーの仕事としては再保険の際にはこの出再割合を定めることにある. 次節以降では実際に出再割合を決める際にはどのようなことをすれば良いのかの概要をのべる.

3 出再割合

3.1 支払い余力率と ROE

この節では出再割合を策定するためにすることを概要のみであるが実際に行う業務をのべる. まず, この出再割合高ければ高いほどそれほど自社の保険会社の利益は低くなる. また, 再保険会社が払う保険料や保険金は当然低くなる. この適切な出再割合を求めるために「支払い余力率」と「ROE」と呼ばれる基準が存在する.

定義 3.1. 保険会社においては健全性, 収益性に関する評価方法として以下のような指標を用いることが一般的である.

(i) $\text{支払い余力率}=\dfrac{\text{期首純資産}}{\text{リスク量}}$ $\cdots$ 財務の健全性を示す指標. 高いほど 契約者にとって魅力的である

(ii) $\text{ROE}=\dfrac{\text{利益}}{\text{期首純資産}}$ $\cdots$ 収益性を示す指標. 高いほど 投資家にとって魅力的である

さて, このリスク量および利益 (期首純資産は純資産と同じだと考える) の計算方法としては以下のようなものがある. また, 資産運用リスク係数とは資産運用をする際にどの程度までリスク水準をあげればリスク係数が上がるかを表したものである. 以下に示すのは利益またリスク量の関係を表に表したものである.

表 1: 利益の関係

利益		
保険料 (出再前)	A	
保険金 (出再前)	B	A ×損害率
出再保険料	C	A ×出再割合× (1+再保険付加率)
保険料 (出再後)	D	A-C
保険金 (出再後)	E	B × (1-出再割合)
事業費	F	D ×事業費率
保険引受損益	G	D-E-F
運用資産	H	D ×保険料 (出再後) のうちの資産運用の割合
資産運用損益	I	H ×資産運用利回り
利益	J	G+I

表 2: リスクの関係

リスク		
保険引受リスク量 (出再前)	α	リスク水準におけるリスク量
保険引受リスク量 (出再後)	β	α× (1-出再割合)
資産運用リスク量	γ	H ×資産運用リスク係数
合計リスク量	Ω	$\sqrt{(\beta^2+\gamma^2)}$

また, リスクの面から出再割合を導出する場合も多数あるため, その手順について概要を説明する.

3.2 リスク量

まず, 損害保険におけるリスクは主に大まかに分けて 2 種類存在する.

$$\text{リスク} = \begin{cases} \text{資産運用リスク} \\ \text{保険引受リスク} \end{cases}$$

の二つのリスクがある. リスクには様々な定義が存在するが今日の研究ではリスク=「平均からのブレ」と定義する.

それぞれ資産運用リスクは資産運用をする際の破綻するリスクなどを表していて, 保険引受リスクは一般的な保険のリスクと自然災害が起こるリスクを考えている. 一般的に保険引受リスクにおいては自然災害などを予測するために予測することは難しいとされている. ここで, それぞれのリスクの量を求めるために「リスク量」という概念を導入する.

定義 3.2 (リスク量)**.** $F_X(x)$ を確率変数 X の密度関数を表しているとすると

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \min\{x|F_X(x) \geqq \alpha\}$$

ここで α は 1-損失確率を表している．また, F_X が逆関数を持つときは

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$$

によって表し, リスク量をこの VaR を用いて以下のように表す場合が多い．リスク量を $\mathrm{R}_\alpha(X)$ によって表すと

$$\mathrm{R}_\alpha(X) = \mathrm{VaR}_\alpha(X) - E(X)$$

ここで, $E(X)$ は期待値を表している．

この定義において VaR を計算するのだが, 実際に計算する際には有限次元分布において計算することが多い．また, データにあった分布の選択をすることによってより正確なリスク量が求まりリスクの軽減, 回避などが可能となるのでデータにあった分布を選択することが大切である．主にアクチュアリーのリスク量を推定するに以下の 4 つの分布を用いることが多い．以下, $f(x)$ を確率密度関数とする．

(I) 正規分布 $\cdots X \sim N(\mu, \sigma^2)$ の時

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

(II) 対数正規分布 $\cdots X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ の時

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} e^{-\frac{(\log(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (x > 0)$$

ただし,

$$\mu = \log\left(\frac{m^2}{\sqrt{m^2+s^2}}\right) \qquad \sigma^2 = \log\left(1 + \frac{s^2}{m^2}\right)$$

ここで m と s はそれぞれ平均と標準偏差

(III) ガンマ分布 $\cdots X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ のとき

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \qquad (x > 0)$$

$$平均 : \frac{\alpha}{\beta} \qquad 分散 \frac{\alpha}{\beta^2}$$

(IV) パレート分布 $\cdots X \sim Pareto(\alpha, \beta)$ のとき

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1} \qquad (x > \beta)$$

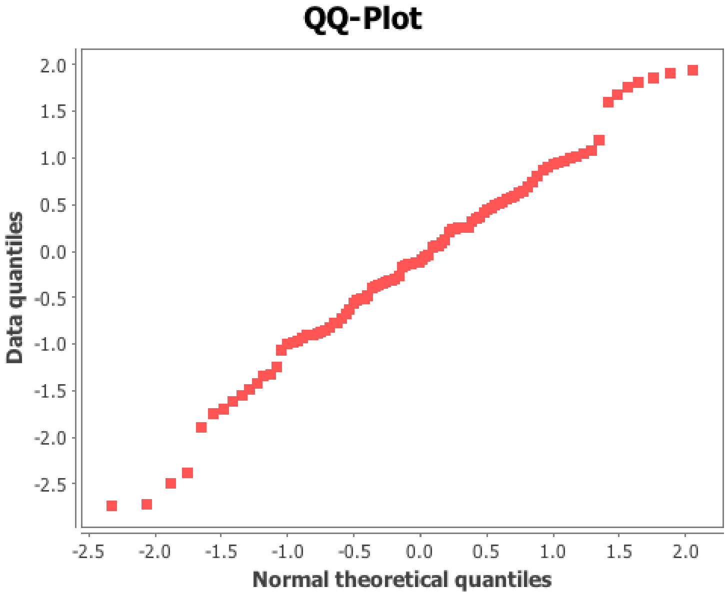
$$平均 : \frac{\alpha\beta}{\alpha-1} \qquad (\alpha > 1) \qquad 分散 : \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-1)} \qquad (\alpha > 2)$$

この 4 つの分布の中からデータが最適であるような分布を用いてリスク量を計算する．また, 正規分布

と対数正規分布においては対数正規分布の方がリスク量が大きくなりやすい性質を持っているためリスク量を大きくすることによって大災害などが起こった際にも対応できることが多い. (最適であるならば)

また, 分布が最適かどうかを判断するような基準として Q-Q **プロット** がある. これはあるデータが仮定した分布に従っているかを知るような手法である. 以下のように直線にどれだけ沿っているかによって判断する.

図 2: Q-Q プロットのイメージ



3.3 相関

リスクとはこの研究においては「平均からのブレ」と考えたが, このブレに相関があるのかないのかなども設定をしなければならない. そのためにまず, 過去のデータ (x_i, y_i) $(i \in \mathbb{N})$ が存在したとしてまず回帰分析を行う. 次に, 回帰分析を行なった結果において 2 つのデータ x_i, y_i において相関が存在しないとする. その場合には (x_i, y_i) のデータの相関を調べることが有効である. 念のため相関係数の定義を確認すると

定義 3.3. 2 種類のデータ x, y について n 個の観測値 $(x_i, y_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$ が与えられた時に x と y の相関を表す **相関係数** である r_{xy} は

$$r_{xy} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}$$

によって相関係数を決定する. また, これは「保険引受リスク」における「一般保険リスク」の相関の計算方法である. では, 果たして「保険引受リスク」と「資産運用リスク」に相関はあるのだろうか. 結論から述べれば僅かに存在する. それを定性的に確かめるために資産運用のリスクについて詳しく紐解いてみる.

資産運用のリスクは以下の 3 つのリスクに分けられる.

$$\begin{cases} \text{価格変動リスク}\cdots\text{株価の変動など} \\ \text{金利変動リスク}\cdots\text{債券など} \\ \text{信用リスク}\cdots\text{経営難や災害, 不祥事によって払うはずの利息や元本の保証ができない} \end{cases}$$

の以下の 3 つに分けられる. ここで, 価格変動リスクにおいて株価が暴落するなどの現象が起きることによって保険引受リスクが上がることがある.

何故ならば, 株価の暴落がする原因としては大災害などの場合があるためである. 当然大災害などが発生すると保険に入る人が増える可能性が高くなるため保険引受リスクと資産運用リスクにおいては相関が僅かながら存在する.

4 今後の課題

今回の研究では実際の業務でやることがわかったため, それを学習として研究発表としてしまったためもう少し自分で新たに数値を設定するなどをして実際の具体例などが出せればよりわかりやすい発表になっていたのではないかと感じた. 今後の課題としてはこの学習したことを通じて実際に自分でもリスク量の計算などをしていきたいと感じた.

参考文献

[1] 中津先生の授業ノート 2018 年 7 月 20 日

[2] モデリング 日本アクチュアリー会 日本アクチュアリー会

[3] 再保険のイメージ図 http://hokensc.jp/yougo/saihoken.html 最終アクセス 平成 30 年 11 月 2 日

[4] Q-Q プロットのイメージ図 https://github.com/incanter/incanter/wiki/Sample-Plots-in-Incanter 最終アクセス 平成 30 年 11 月 2 日

[5] あいおいニッセイ同和損保アクチュアリーインターシップ体験コース Day1,Day2 資料