Banach-Tarski の定理

平成 30 年 11 月 3 日

芝浦工業大学 数理科学研究会
BV17077　　横井 健

目次

1 歴史 1

2 Banach-Tarski の定理 1

2.1 Banach-Tarski の定理って何 1

2.2 準備 2

3 強 Banach-Tarski の定理 6

研究動機

以前から選択公理に興味があり, それに関する本を読み進めていたとき, 「1 つのボールを有限個に分割して元のボールと同じ形, 同じ大きさなるように組みなおせる」ことをいっている定理を見つけ, あまりにも感覚とあっていないことに興味をもった.

1 歴史

1914 年 Felix Hausdorff によって発表された論文 (Hausdorff の定理[*1]) が Banach と Tarski による共同研究のきっかけとなった.

Hausdorff の定理が発表されれから 10 年後に Banach と Tarski は独自に球面全体の複製を許す球面全体に対するパラドックスに拡張する方法を発見した. そして彼らはパラドックスが球体にまで拡張されることを示した. これが Banach-Tarski の定理 (パラドックス) と知られている定理で球体を有限個に分解され, 元の大きさの球体が 2 つに出来るように組み立てなおすことが出来るというものである. またこの定理と同値なもので先のものを複製バージョンとするなら強形バージョンまたは拡大バージョンとにあたる強 Banach-Tarski の定理では, 小さな豆を有限個に分解して, どんな形のどんな大きさの物体にも組み立てなおすことが出来ることを主張している.

しかし数学の用語を用いずにこの定理を幾何学的な簡単な用語で述べることが出来たという事実は, より多くの人の目に届くものになった. この証明が選択公理に依存することと結論が奇妙なものであることにより, 数学者の間で物議をかもしだした. 一方, 一般の人には, この結論だけが注目され「一人の激怒した市民がイリノイ州の学校でこの結果を教えることを禁止することをイリノイ議会に要求した」ということもあったようだ.

それから 40 年間, 集合論, 選択公理, Banach-Tarski の定理に関する論争は解決しないまま激しくなったが, 最終的に Kurt Gdel と Paul Joseph Cohen の業績がこの物語に終止符を打つ形となった.

2 Banach-Tarski の定理

2.1 Banach-Tarski の定理って何

この定理がいっていることは 1 つのボールを 5 等分し, 元のボール同じ形, 同じ大きさのボールを 2 つ作れることを主張している. 一見するとこの定理は現実的ではなく非常に理解しがたいのと感じる. ここではこの定理が成り立つことを証明し, 発表では証明の概略を説明する.

[*1] P.2 定理 2.1 参照

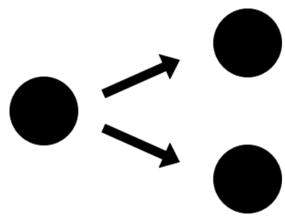

図 1　1 つの球体から 2 つの球体をつくる

2.2　準備

定理 2.1 (Hausdorff の定理)**.**

2 次元球面 K を 3 つの部分集合 A, B, C に分割して, A, B, C および $B \cup C$ が互いに合同となるようにすることが出来る.

証明大要. φ を 1 つの軸のまわりの 180° の回転, ψ をこれと異なる軸のまわりの 120° の回転とする. φ, ψ, ψ^2 によって生成された回転群 G を考える. その要素は

$$1 \mid \varphi, \psi, \psi^2 \mid \varphi\psi, \varphi\psi^2, \psi\varphi, \psi^2\varphi \mid \cdots\cdots \tag{2.1}$$

のように表すことができる. 回転軸を適当に選んで,

$$\varphi^2 = \psi^3 = 1 \quad (1 \text{ は恒等変換})$$

以外に φ と ψ の間に関係がないように出来る. このことから, (2.1) に記した形の表現

$$\varphi^k \psi^{i_1} \varphi \psi^{i_2} \varphi \cdots \psi^{i_{n-2}} \varphi \psi^{i_{n-1}} \varphi^l \quad (k, l = 0, 1; i_1, \cdots, i_{n-1} = 1, 2; n \geq 1) \tag{2.2}$$

は, 形式的式が異なれば実際に異なる要素であることがわかる. (2.2) は球面の回転であるから, 1 以外のものの不動点は 2 個, 従って, G による不動点全体の集合 $\mathbb{Q}$ は可算集合である.

ここで (2.1) を, (ρ を G の任意の要素として)$\rho, \rho\varphi$ のうちの一方を A に, 他方を $B \cup C$ に; $\rho, \rho\varphi, \rho\varphi^2$ を適当に A_0, B_0, C_0 に分割する. まず, $1 \in A_0, \varphi \in B_0, \psi \in B_0, \psi^2 \in C_0$ とする. (2.2) の生成元の個数が n 個のとき上記の割り当てが出来たと仮定する. ρ を n 個の因子の積とするとき, $n+1$ 個の積について:

(i) ρ が ψ または ψ^2 で終わるときの $\rho\varphi$. ρ がクラス A_0, B_0, C_0 のどれかに属するかに従って, $\rho\varphi$ をそれぞれ B_0, A_0, A_0 に割り当てる.

(ii) ρ が φ で終わるときの $\rho\psi$. ρ がクラス A_0, B_0, C_0 のどれかに属するかに従って, $\rho\psi$ をそれぞれ B_0, C_0, A_0 に割り当てる.

(iii) ρ が φ で終わるときの $\rho\psi^2$. ρ がクラス A_0, B_0, C_0 のどれかに属するかに従って, $\rho\psi^2$ をそれぞれ C_0, A_0, B_0 に割り当てる.

これを表にすると次のようになる.

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} A_0: 1 & & \psi\varphi, \psi^2\varphi, \varphi\psi^2 & \varphi\psi\varphi & \cdots \\ B_0: & \varphi, \psi & & \varphi\psi^2\varphi, \psi\varphi\psi, \psi^2\varphi\psi & \cdots \\ C_0: & \psi^2 & \varphi\psi & \psi\varphi\psi^2, \psi^2\varphi\psi^2 & \cdots \end{array}$$

さて, $P = K - Q$ とおく, P の各点は $G - \{1\}$ の要素によって異なる点に移る. そこで

$$P_x = \{x\rho \mid \rho \in G\} \quad (x \in P)$$

と定義すれば, $x, y \in P$ に対し

$$P_x = P_y \vee P_x \cap P_y = \emptyset$$

となること, すなわち P_x たちは P の分割であることが容易にわかる. そこで選択公理により, 各 P_x から一点ずつ選んで, $\{P_x \mid x \in P\}$ の選択集合 M を作る. このとき

$$P = \cup\{M_\rho \mid \rho \in G\}$$

であるから, G の分割 $G = A_0 \cup B_0 \cup C_0$ を使って P を次のように分割できる:

$$P = A \cup B \cup C$$

ここに,

$$\begin{aligned} A &= MA_0 = M \cup M\psi\varphi \cup M\psi^2\varphi \cup M\varphi\psi^2 \cup \cdots \\ B &= MB_0 = M\varphi \cup M\psi \cup M\varphi\psi^2\varphi \cup \cdots \\ C &= MC_0 = M\psi^2 \cup M\varphi\psi \cup \cdots \end{aligned}$$

ここで, ちょうど

$$A\varphi = B \cup C, A\psi = B, A\psi^2 = C$$

となる. ゆえに, $A, B, C, B \cup C$ は互いに合同である.

□

定義 2.2.

(1) $X = Y \sqcup Z \Leftrightarrow X = Y \cup Z$ かつ $Y \cap Z = \emptyset$

(2) $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ を有界部分集合とする. このときある $r = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ が存在して $X \cap (Y + \varepsilon) = \emptyset (Y + \varepsilon :\ = \{(x + a, y + b, z + c) \mid (x, y, z) \in Y\})$ とできる. この r を使って $X \oplus Y :\ = X \sqcup (Y + \varepsilon)$ と定める.

定義 2.3.

$X, Y \subset \mathbb{R}^3$ が分割合同

$\Longleftrightarrow$ ある $n \in \mathbb{N}$ と $X_i, Y_i \subset \mathbb{R}^3$, $\sigma_i \in G_3 (0 \leq i \leq n)$ が存在して $X = X_0 \sqcup \cdots \sqcup X_n, Y = Y_0 \sqcup \cdots \sqcup Y_n, Y_i = \sigma_i X_i$.

命題 2.4.

(1) 分割合同 $\sim$ は同値関係

(2) $X_0 \sim Y_0, X_1 \sim Y_1$ ならば $X_0 \oplus X_1 \sim Y_0 \oplus Y_1$ である. 特に $X_0 \cap X_1 = \emptyset, Y_0 \cap Y_1 = \emptyset$ ならば $X_0 \sqcup X_1 \sim Y_0 \sqcup Y_1$ となる.

定義 2.5.

X を集合とする. 有限列の集合 $\{x_1 \cdots x_n \mid n \in \mathbb{N}, x_i \in X \cup X^{-1}\}$ に積を列の集合 $(x_1 \cdots x_n)(y_1 \cdots y_m) := x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_m$ で定めるとこれは群になる (但し, x と x^{-1} が隣り合ったときはキャンセルし, 空文字列を単位元とみなす). これを X で生成される自由群という.

二次元集合 $\{\rho, \tau\}$ で生成される自由群を F_2 とかく.

命題 2.6 (Banach-Tarski の定理)**.**

$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ とすれば $B \sim B \oplus B$.

証明.

命題 2.7.

$S^2 \sim S^2 \oplus S^2$ とする. このとき $B \sim B \oplus B$.

証明. $S^2 = X_0 \sqcup \cdots \sqcup X_n, S^2 \oplus S^2 = Y_0 \sqcup Y_n, Y_i = \sigma_i X_i$ とする. $X \subset S^2$ に対して $\bar{X} := \{tx \mid x \in X, 0 < t \leq 1\}$ とすれば $\bar{S^2} = B \setminus \{O\}$ となり, $B \setminus \{O\} = \bar{X_0} \sqcup \cdots \sqcup \bar{X_n}, B \setminus \{O\} \oplus B \setminus \{O\} = \bar{Y_0} \sqcup \cdots \sqcup \bar{Y_n}, \bar{Y_i} = \sigma \bar{X_i}$ である. 故に $B \sim B \setminus \{O\} \sim B \setminus \{O\} \oplus B \setminus \{O\} \sim B \oplus B$ である. □

ゆえに, 後は $S^2 \sim S^2 \oplus S^2$ を示す.

命題 2.8.

$W(\sigma) := \{x_1 \cdots x_n \in F_2 \mid x_1 = \sigma\}$ と置けば

$$\begin{aligned} F_2 &= \{1\} \sqcup W(\rho) \sqcup W(\rho^{-1}) \sqcup W(\tau) \sqcup W(\tau^{-1}) \\ &= W(\rho) \sqcup \rho W(\rho^{-1}) \\ &= W(\tau) \sqcup \tau W(\tau^{-1}) \end{aligned}$$

命題 2.9.

選択公理を仮定する. F_2 が集合 $X \subset \mathbb{R}^3$ に自由に作用しているとき, ある $A, B \subset X$ 存在して $A \sqcup B \subset X, X \sim A \sim B$.

※ 群 G の X への作用が自由である.

$\Leftrightarrow$ 任意の $g \in G, x \in X$ に対して「$gx = x \Leftarrow g = e$」

証明. X に同値関係 R を「$xRy \Leftrightarrow$ ある $\sigma \in F_2$ が存在して $y = \sigma x$」で定める．選択公理により商集合 X/R の完全代表系 M を取ることが出来る．すると作用が自由であるから $X = \bigsqcup_{\sigma \in F_2} \sigma M$ となる．

$$A_0 \colon = \bigsqcup_{\sigma \in W(\rho)} \sigma M, A_1 \colon = \bigsqcup_{\sigma \in W(\rho^{-1})} \sigma M, A \colon = A_0 \sqcup A_1$$
$$B_0 \colon = \bigsqcup_{\sigma \in W(\tau)} \sigma M, B_1 \colon = \bigsqcup_{\sigma \in W(\tau^{-1})} \sigma M, B \colon = B_0 \sqcup B_1$$

と置けば, $X = A_0 \sqcup \rho A_1 = B_0 \sqcup \tau B_1 \supset A_0 \sqcup A_1 \sqcup B_0 \sqcup B_1$ であるから $A \sqcup B \subset X$ かつ $X \sim A \sim B$ となる． □

定義 2.10.

$A, B \subset \mathbb{R}^3$ に対して二項関係 $\precsim$ を次のように定める．

$$A \precsim B \Leftrightarrow \text{ある } B' \subset B \text{ が存在して } A \sim B'.$$

命題 2.11 ((Banach-Bernstein-Schröder の定理)**.**

$A \precsim B$ かつ $B \precsim A$ ならば $A \sim B$

証明. $A \sim B$ のとき, 全単射 $f \colon A \to B$ で「任意の $A' \subset A$ に対して $A' \sim f(A')$」を満たすもが取れることに注意しておく．

$A \precsim B$ かつ $B \precsim A$ とする．ある $A' \subset A$ と $B' \subset B$ が存在して $A \sim B'$ かつ $B \sim A'$ である．よって, 全単射 $f \colon A \to B'$ と $g \colon A' \to B$ で先の条件を満たすものが取れる． $A_0 := A \setminus A', A_{n+1} := g^{-1} \circ f(A_n), X := \bigsqcup_{n=0}^{\infty}$ と定める．

$X \subset A, A \setminus X \subset A'$ だから $X \sim f(X), A \setminus X \sim g(A \setminus X)$ である．従って, $A = X \sqcup (A \setminus X) \sim f(X) \sqcup g(A \setminus X) = B$ がわかる． □

命題 2.12.

$\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする回転がなす, G_3 の部分群を $SO(3)$ で表す. $SO(3)$ は F_2 と同型な部分群を持つ．

証明. $\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ として, $\mathbb{R}^3$ の z 軸を軸とする θ ラジアンの回転を ρ, x 軸を軸とする θ ラジアンの回転を τ とすれば, ρ, τ が生成する $SO(3)$ の部分群は ρ, τ が生成する部分群 F_2 であることがわかる． □

この命題により, $F_2 \subset SO(3)$ とみなせば, F_2 は球面 S^2 に作用する．各元 $\sigma \in F_2$ の不動点 $x \in S^2$ はちょうど 2 つある．よって, $D := \{x \in S^2 \mid \text{ある}\sigma \in F_2\text{が存在して}\sigma x = x\}$ は可算集合である．このとき F_2 は $X := S^2 \setminus D$ に自由に作用する．ゆえに命題 2.9 からある $A, B \subset X, A \cap B = \emptyset$ が存在して $A \sim X$ かつ $B \sim X$ である．A, B の取り方から $X \sim B \subset X \setminus A \subset X$, 即ち, $X \precsim X \setminus A$ かつ $X \setminus A \precsim X$ であるから命題 2.11 により

$X \setminus A \sim X$ が分かる. 改めて $B := X \setminus A$ と書き直せば, $X = A \sqcup B \sim A \sim B$ が分かる. 即ち, $S^2 \setminus D \sim (S^2 \setminus D) \oplus (S^2 \setminus D)$ である.

命題 2.13.
$S^2 \sim S^2 \oplus S^2$

証明. $\sigma \in SO(3)$ で $D, \sigma D, \sigma^2 D, \cdots$ が互いに素となるものが存在する.

$\because$) D を通らない, 原点を通る直線 $l \subset \mathbb{R}^3$ を一つ取る. 正整数 $n > 0$ と $x \in D$ に対して

$$A(nP) := \{\theta \in (0, 2\pi) \mid l \text{ を軸とする} \theta \text{ラジアン回転を} \sigma \text{とすれば} \sigma^n(P) \in D\}$$

とかくと $A(n, P)$ は可算集合である. 故に $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{P \in D} A(n, P)$ は可算集合である.
故に, $(0, 2\pi) \setminus A \neq \emptyset$ であるから $\theta \in (0, 2\pi) \setminus A$ を一つ取り l を軸とする θ ラジアンの回転を $\sigma \in SO(3)$ とすればこれが条件を満たす.

このとき $Y := S^2 \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma^n D \right)$ と置けば $S^2 = Y \sqcup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma^n D \right) \sim Y \sqcup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma^{n+1} D \right) = S^2 \setminus D$ である. 故に, $S^2 \sim S^2 \setminus D \sim (S^2 \setminus D) \oplus (S^2 \setminus D) \sim S^2 \oplus S^2$ となる. □

以上より $B \sim B \oplus B$ が示された. □

3 強 Banach-Tarski の定理

命題 3.1 (強 Banach-Tarski の定理)**.**
内部が空でない有界部分集合 $X, Y \subset \mathbb{R}$ に対して $X \sim Y$

証明. 仮定によりある球体 K, L が存在して $X \subset K$ かつ $L \subset Y$ となる. $n \in \mathbb{N}$ を十分大きく取り, L の n 個のコピー $L_1, \cdots, L_n$ で K を被覆する. このとき $X \subset K \precsim L_1 \oplus \cdots L_n \sim L \subset Y$ より $X \precsim Y$ が分かる. 同様にして $Y \precsim X$ だから $X \sim Y$ となる. □

今後の課題

学習不足により, 理解しきれていない部分が出来てしまった, 今後は全体の流れを見直し, 証明に必要な分野の学習もしていきたい.

参考文献

[1] Leonard M. Wapnaer 著 佐藤かおり, 佐藤 宏樹 訳, バナッハ=タルスキーの逆説 豆と太陽は同じ大きさか?, 青土社, 2009 年.

[2] `http://alg-d.com/math/ac/banach_tarski.pdf`, 2013 年 3 月 24 日.

[3] 田中尚夫 著, 選択公理と数学 発生と論争, そして確立への道, 2005 年 10 月 1 日.