群論を用いたルービックキューブの考察

芝浦工業大学　数理科学研究会
bv180551 千葉龍朗

平成 30 年 11 月 2 日

1　研究背景

群論に関する本を読んでいたら, 群は対称性という性質を表すものだから, ルービックキューブを群論を用いて研究することができると書いてあったので, 研究することにした.

2　研究概要

目的は, ルービックキューブのパターンは $8! \times 12! \times 3^7 \times 2^{11}$ であることの証明と, 群論の理解である.

3　操作の用語

U を, ルービックキューブの上面を上から見て時計回りに 90 度回転させる操作とし, 同様にして D, L, R, F, B を定める. また, ルービックキューブを 1 面体と 2 面体と 3 面体の集まりとみると, f, urf, uf と表すことができる. ただし, f は前面の真ん中にある一面体, urf は上面と右面と前面の頂点にある 3 面体, uf は上面と前面の辺にある 2 面体である.

- $X, Y, Z \in G$ について, $(XY)Z = X(YZ)$ が成り立つ.
- 単位元 $E \in G$ が存在し,$XE = EX = X$ である.
- $XY = E$ を満たす X, Y が存在する. よって集合 G は群である. この群をルービックキューブ群と呼ぶ. 以下 $\mathbb{RB}$ 群と書くことにする.

4　キューブ理論の第 1 基本定理

図 1 のように, ルービックキューブの各面に印を付ける. このとき, 次の 4 つの決定過程でルービックキューブの配置が決定される.

- どのように 2 面体が置換されたか.
- どのように 3 面体が置換されたか.
- 青い印に対してどの 2 面体の赤い印が反転したか.
- 青い印に対してどの 3 面体の赤い印がどれだけ回転したか.

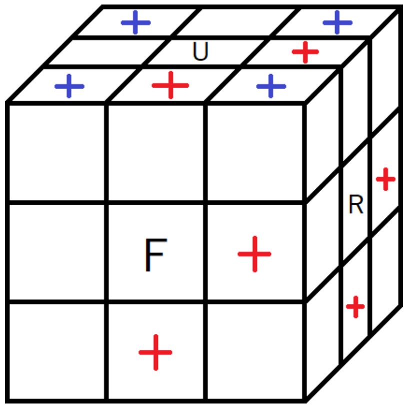

図 1　印をつけたルービックキューブ

これをキューブ理論の第 1 基本定理と呼ぶ. 感覚的にはわかるが, 厳密な証明はどうすればよいか分からない.

5　特別な場合での同型写像

ルービックキューブをバラバラにして組み立ててもよいという条件での $\mathbb{RB}$ を G_0 とする. このとき, 次のような同型写像が存在する.

$$G_0 \cong (C_3^7 \rtimes S_8) \times (C_2^{11} \rtimes S_{12})$$

ただし, $\rtimes$ は半直積, C_n は位数 n の巡回群, S_n は n 次の対称群とする. まだ半直積すら理解できていないので証明できない.

6　今後すること

半直積の意図の理解と上の証明をする予定.

参考文献

[1] 雪江明彦, 代数学 I 群論入門, 日本評論社, 2010.
[2] 現著者:David Joyner, 訳:川辺治之 群論の味わい 置換群で解き明かすルービックキューブと 15 パズル, 共立出社株式会社, 2010