実数をわかりやすく考える

芝浦工業大学　数理科学研究会
AG18083 芳賀亮多

2018/11/02

1　発表背景

数学に慣れない人でも実数の面白さを理解してほしいと思い発表の題材とした.

2　数直線上で有理数を考える

数直線上の 0 と 1 との間を n 等分し, 0 に近い分点に $\frac{1}{n}$ と目盛りをつける. 次はこれを基準に $\frac{m}{n}(m = 0, 1, 2 \cdots ; -1, -2, \cdots)$ の目盛りをつける点が決まってくる. こうして有理数 $\frac{m}{n}$ は, 数直線を等間隔に区切ることでその区切り目丁度に存在する数であるとわかった.

3　有理数の濃度

ある有理点 P(有理数が存在する点のこと, 区切れ目) とまた別の有理点 Q との中点は当然有理点である. この操作を繰り返すと PQ 間には有理点がぎっしり存在しているように感じる. しかし数直線上の点全体の個数と比べると有理点の個数はさほど多くはない. 区切れ目丁度に無い数を考えたとき一気にその個数は大きくなる.

4　実数を小数で考える

有理数という集合を拡張する. 有理数は分割の区切り目丁度に存在する数であったが, ここで区切れ目に存在しない数を考えることで有理数以外の数を考えることができるようになる. 今回は小数を用いることでより直感的に理解できるように説明したい.

5　分割を小数で考える

まず数直線上で小数 (今回は簡単のために 0 と 1 の間のみを考える) を表してみる.
0 と 1 の間を 10 等分し. 得た区間を左から順に $J_0, J_1, \cdots, J_9$ とする. このとき 以上のようにして小数点以下の桁

J_0	に含まれている数は,	$0.0\cdots$	と表される.
J_1	に含まれている数は,	$0.1\cdots$	と表される.
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
J_9	に含まれている数は,	$0.9\cdots$	と表される.

数が 1 増えるたび, その数のある範囲が前より $\frac{1}{10}$ ずつ小さい区間へと限定されている. つまり小数点 n 位までの値が求まれば, この点は $\frac{1}{10^n}$ の長さの特定の区間にあると限定される. 例えば $0.356984125687\cdots$ というという無限小数は区間 $J_{356984125687}$ に存在する.
この考え方によって数直線上の有理数以外の数は無限小数で表せることがわかった.

6　有理数を無限小数で表す

区切り目にある数すなわち有理数を小数で表すと有限小数と循環小数である. これらの小数を無限小数で書き表し, 無限小数一つ一つが数直線上の一つ一つ点と一対一に対応していることを示すことができれば, 有理数を拡張して実数を捉えることができたといえる.
循環小数に関してはその性質から無限小数であることはわかる. 有限小数に関しては $1 = 0.999\cdots$ であることから無限小数で書き表わすことができ, 逆もまた然りである.
以上より数直線上にある全ての数は無限小数で表すことができ, その一つ一つが数直線上の全ての点と一対一に対応していることがわかった.

7　参考文献

- 志賀浩二 (1988)『集合への 30 講』(数学 30 講シリーズ 3) 朝倉書店.
- 原 隆 (2007) 「実数の構成に関するノート」, 〈http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/ hara/lectures/07/realnumbers.pdf〉.