

# 四元数(回転運動の記述)

芝浦工業大学 数理科学研究会  
ab18053 鶏徳亮

平成 30 年 11 月 2 日

## 1 研究背景

ふと考えたことがある。それは、「上には上がいるというならば、複素数を拡張させたものもあるのではないか」というものだった。調べてみると、四元数というものがあった。さらに深く調べると、これがまた予想以上に興味深いものであったので、研究するに至った。

## 2 四元数とは

まず、前提として虚数という概念が必要となってくる。虚数とは、2乗すると負の数になる数のことで、一般に  $i$  という文字を使う。さらに、 $a+bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) という式で表されるものを複素数といい、一般に実数の拡張とされている。四元数とは、 $i$  のほかに  $j, k$  という文字を合わせて成り立っている。まず、四元数の大きな特徴の一つとしては、三次元空間における回転運動を美しく記述することができる、というものがある。今回は、これについて調べることとした。

## 3 四元数

### 3.1 定義

まずは何といっても、定義がなければ成り立たない。三つの虚数単位についての関係式を、以下に示す。

定義

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

この式から、以下の六つの関係式を導くことができる。

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$$

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j$$

### 3.2 回転運動の記述方法

公式

あるベクトル  $X(x, y, z)$  を、 $x = xi + yj + zk$  と表す。そして回転後のベクトルを  $X'$  とおくと、

$$X' = qX\bar{q}$$

ここで、

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + u \sin \frac{\theta}{2}$$

(ただし、 $\theta$  は反時計回りに回した時の回転角である。)

また、 $\bar{q}$  は共役四元数であり、 $u$  は、回転軸となる単位ベクトルである。(共役四元数とは、例えば  $q = a + bi + cj + dk$  であるとき、 $\bar{q} = a - bi - cj - dk$  となるような四元数のことである。)

### 3.3 その他の定義

絶対値、逆元の定義

複素数の場合と同じような形の定義をすることができる。

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}}, \quad q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$$

## 4 今後の課題

今回は四元数の、物理などに用いられている用法の紹介だったが、今後はさらに四元数の諸性質や四次元空間における回転なども調べてみようと思う。

## 参考文献

- [1] 今野紀雄, 四元数, 森北出版株式会社, 2016.
- [2] 四元数 [物理のかぎしっぽ], <http://hooktail.sub.jp/mathInPhys/quaternion/>, 2018/09/04 最終アクセス