極限とその厳密な定義について

bv18077　森田 泰成

2018 年 11 月 3 日

1 研究にあたって

前期数学 I の授業で数列の極限について学んだが, その中で極限の定理が今のところ証明できないとされ, 気になり今回はその証明について学習することにした.

2 研究概要

今回は, 数列の極限とその先の実数の連続性の 2 つに絞り研究することにしたが紙面の都合上, 今回は数列の極限のみとする.

3 高校数学の極限における定義の曖昧さ

高校数学では極限について次のように定義した.

数列 x_n において, 番号 n を限りなく大きくするとき, x_n がある定数 a に近づくならば, これを

$$n \to \infty \text{ のとき } x_n \to a \text{ ; あるいは } \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

という記号で表し, このとき, 数列 x_n は a に**収束**するという. また, a を数列 x_n の**極限値**という.

このとき, 「限りなく〜」といった言葉は聞こえはいいが極めて厳密性に欠けるものだ. したがって, すこし厳密な議論をしようとすると先の定義では不十分であることが多い. そこでその定義の内容をもっと厳密に表現すると次の定義が登場する.

数列 x_n において任意の正の数 ε に対して, 適当な番号 $N \in \mathbb{N}$ を定めると,

$$n > N \text{ のすべての n について } |x_n - a| < \varepsilon$$

となるつまり、

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N\ ;\ |x_n - a| < \varepsilon$$

と表すことができ、これを

$$n \to \infty \text{ のとき } x_n \to a;\text{ あるいは } \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

という記号で表す。このとき, 数列 x_n は a に**収束**するという. また, a を数列 x_n の**極限値**という.

4 $\varepsilon - \delta$ 論法とは

先ほどの定義と合わせて数列や関数の極限を議論していく方法に $\varepsilon - \delta$ 論法というものがある. (数列の極限に関しては $\varepsilon - N$ 論法と呼ばれている) 上の新しい定義二つを見比べてほしい.

5 極限の証明

上のように表すことで今までの曖昧な定義ではなく, 厳密な定義へと発展できた. また, これを用いることで以下のような定理も証明可能となる.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき

1. $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$ (k : 定数)
2. $\lim_{n\to\infty}\{a_n \pm b_n\} = \alpha \pm \beta$ (複合同順)
3. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$
4. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ $(b_n \neq 0,\ \beta \neq 0)$

このような今まで通りの極限の定理の証明の他にも関数の極限を $\varepsilon - \delta$ 論法で定義することで、関数の連続性や以下のような様々な定理を証明することができる。

1. 関数 $f(x)$ が有界数列 $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ 上で連続で、$f(a) < 0$ かつ $f(b) > 0$ ならば、ある $c \in I,\ a < c < b$ が存在し、$f(c) = 0$ となる。(中間値の定理)
2. 関数 $f(x)$ が有界閉区間 $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ 上で連続ならば、$f(x)$ は I で最大値と最小値を持つ。(最大、最小の定理)

6 今後の課題

今回で極限についての疑問は解消された. 極限について学習しているうちに有理数と無理数について興味深い内容があったので今後はそちらに足を踏み入れたいと思う.

参考文献

[1] 田島一郎, 解析入門, 岩波全書, 1981 年