様々な確率分布

芝浦工業大学　数理科学研究会
bv18020 大橋達也

平成 30 年 11 月 2 日

1　研究背景

1 年次ではまだ履修不可能な確率統計の分野を, 予習がてらに勉強したいと思い, その中でも重要な確率分布が何かを知りたかったから.

2　確率分布と平均・分散

試行によって起こるすべての場合の集合を標本空間といい, Ω で表される. また, ある事象が起こる割合を確率といい, P で表される.

Ω で定義された関数 $X = X(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ を確率変数という.

確率変数 X に対して, X についての事象 A とその確率 $P(A)$ との対応 (対応規則) を X の確率分布という.

X の確率関数を $P(X = x_k) = p_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ とする. ここで, この確率変数の平均 m は以下のように表される.

$$m = E[X] = \sum_k x_k p_k$$

また, X の密度関数を $f(x)$ とすると,

$$m = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

確率変数の分散 σ^2 は以下のように表される.

$$\sigma^2 = V(x) = E[(X-m)^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

3　様々な確率分布

3.1　二項分布

X を確率変数, n を自然数, $0 < p < 1$ とする. 二項分布とは

$$P(X = k) =_n C_k p^k (1-p)^{n-k} \ (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

によって定まる確率分布である. 平均は $E[X] = np$, 分散は $V[X] = np(1-p)$ となる.

3.2　ポアソン分布

X を確率変数とし, $\lambda > 0$ とする. ポアソン分布とは

$$P(X = k) = e^{-k} \frac{\lambda^k}{k!} (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

によって定まる確率分布である. 平均, 分散ともに $E[X] = V[X] = \lambda$ となる.

3.3　幾何分布

X を確率変数とし, $0 < p < 1$ とする. 幾何分布とは

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \ (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

によって定まる確率分布である. 平均は $E[X] = \dfrac{1}{p}$, 分散は $V[X] = \dfrac{1-p}{p^2}$ となる.

3.4　一様分布

a, b を実数とし, $a < b$ とする. 一様分布とは

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (a \leq x \leq b) \\ 0 & (x < a, \ b < x) \end{cases}$$

によって定まる確率分布である. 平均は $E[X] = \dfrac{b+a}{2}$, 分散は $V[X] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$ となる.

3.5　指数分布

$\lambda > 0$ となるような定数とする.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

によって定まる確率分布である. 平均は $E[X] = \frac{1}{\lambda}$, 分散は $V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$ となる.

3.6　正規分布

$m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ とする. 正規分布とは

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \ (x \in \mathbb{R})$$

によって定まる確率分布である. 平均は $E[X] = m$, 分散は $V[X] = \sigma^2$ となる.

4　今後の課題

求めた確率分布の実用性や, 多次元の確率分布について調べ理解できるだけの力量を身につける.

参考文献

[1] 穴太克則, 講義:確率・統計, 学術図書出版社, 2012.
[2] 服部哲也, 確率分布と統計入門, 学術図書出版社, 2011.