差分方程式

芝浦工業大学　数理科学研究会
BV18015 大岡舜明

2018 年 11 月 03 日

1　研究背景

大学に行くと数学の分野が細かく分かれ, 何を学習するかより精密に焦点を定めなくてはならない. そんな中, 微分方程式が数学のみならず一般力学でも主として使われ驚いた. 微分方程式がこの先当然のように使われると同時に, 差分方程式は極限で微分方程式になるので微分よりも差分の方がより広いクラスの現象を考えるときに役立つ. また授業ではあまり扱わないであろうこそ, 研究に向いていると考え研究テーマに決定した.

2　差分方程式の定義

整数 n の関数 x_n と自然数 s が与えられたとき, 連続した $s+1$ 個の項 $x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+s}$ を考える. 差分方程式とはこの列の間の関係式

$$F(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+s}, n) = 0 \ \ (n \text{ は整数})$$

のことである. この関係式を s 階の差分方程式という. 一般に, s 階の差分方程式では連続した s 項 $x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+s-1}$ を与えると次の項 x_{n+s} の値が決まるが一意的とは限らない. x_{n+s} が $x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+s-1}$ によって一意的に表現されてるときは,

$$x_{n+s} = f(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+s-1}, n) \ \ (n \text{ は整数})$$

と表せる. この差分方程式を陽的方程式または漸化式という. (上記の式で, s=1 の場合 $F = (x_n, x_{n+1}, n) = 0$, $x_{n+1} = f(x_n, n)$ という関数であり, 具体的に挙げると, $x_{n+1} = x_n + 2n + 1$ のような方程式.)

3　例題

例 1. $x_{n+1} = x_n + 2n + 1, x_0 = 0$ を解く.
(解答) $x_{n+1} - x_n = 2n + 1$, と変形してこの式を $n = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ について書き並べてこれらを足し合わせると, 左辺は $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ が互いに打ち消し合って, 残るのは $x_n - x_0$ だけとなる. したがって

$$x_n - x_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)$$

となる. ゆえに求める解 x_n は,

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = 0 + n(n-1) + n = n^2$$

例 2. $x_{n+1} - (n+1)x_n = (n+2)!$, $x_0 = 1$　$(n = 0, 1, 2, \cdots$ また, $0! = 1)$ を解く.
(解答) ここでは定数変化法を使ってみよう. この方法ではまず同次方程式

$$\hat{x}_{n+1} = (n+1)\hat{x}_n$$

の解 $\hat{x}_n$ を求める. 次にその解に含まれる任意定数が変化したのが非同次方程式の解であると考える. この式を変形して

$$\frac{\hat{x}_{n+1}}{\hat{x}_n} = n + 1$$

を得る. この式を $n = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ について書き並べて掛け合わせると,

$$\frac{\hat{x}_n}{\hat{x}_0} = \prod_{k=0}^{n-1}(k+1)$$

が得られる. $\hat{x}_0$ の値はわからないので定数 c を使えば, 解は $\hat{x}_n = c * n!$ で, $x_n = c_n * n!$,　$x_0 = c_0 = 1$ を与式に代入すると c_n に対する方程式

$$c_{n+1}(n+1)! - (n+1)c_n n! = (n+2)!, \quad \therefore c_{n+1} - c_n = n + 2$$

が得られる. この式を解くと $c_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ となる. 従って,

$$x_n = \frac{1}{2}(n+2)!$$

が解である. (解のチェックは省略)

4　今後の課題

研究内容をより明確にする. もう少し面白い部分を見つけて発表したい.

参考文献

[1] 差分と超離散　広田良吾, 高橋大輔　共立出版, 2003 年.