代表的な変分問題と解析力学への導入

芝浦工業大学　数理科学研究会

BP18078 豊嶋 祐人

平成 30 年 11 月 4 日

1　発表の動機

私は解析力学が好きなのだが, その解析力学などで用いられている変分法という数学の一分野をしっかりと学んでみたいと思い, この発表に至った.

2　概要

汎関数 (関数を入力値とする写像) の微分に対する一連の考察方法を変分法と呼び, 変分法は汎関数の最小性などを扱うことから, 幅広い分野で用いられている. 本来ならば汎関数の連続性等を論じるために関数どうしの距離の概念を導入しなければならないが, おおよそ汎関数の変分は通常の関数に対する微分と同様の性質を持つことが知られている. そのような性質を認めた上で, 今回は簡単な変分法の理論と変分問題を紹介しようと思う. また, 議論の終盤では変分法を用いて最小作用の原理（解析力学の基本原理）の構築を行う. Newton から Lagrange への軌跡が綺麗に描かれていることに注目されたい.

3　変分法の基本問題と Euler 方程式

変分法の基本問題とは, $\delta y(a)=0,\ \delta y(b)=0$ という境界条件のもとで $J[y]=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))\ dx$ という形の汎関数の極値を求める問題である. このとき, $y(x)\to y(x)+\delta y(x)$ のように変関数に微小増分を与え, $J[y+\delta y]-J[y]=0$ を極値をとるための必要条件とすれば, 停留曲線に対して, 以下の Euler 方程式が得られる.

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

4　直線の性質の証明

2 次元 Euclid 空間上のある 2 点を結ぶ曲線族のうち, その長さが最短となるようなものが直線であることは直観的に明らかであるが, 解析的には変分法を用いて以下のように証明される.

この変分問題では曲線の長さを表す汎関数 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+(y')^2}dx$ の停留性と最小性が同義であるため, 求める曲線に対して Euler 方程式が成り立つ. すなわち,

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)=0$$

が得られるので, $y'=const.$ が得られ, $y(x)$ は直線となる.

5　最小作用の原理

解析力学では, 最小作用の原理を運動方程式に代わる基本原理として採用する. 解析力学の創始者 Lagrange は, 静力学において成り立つ仮想仕事の原理を動力学に拡張させることで最小作用の原理を演繹した. すなわち, $L\equiv T-U$ とすれば,[1]

$$(F_i-m\ddot{x}_i)\cdot\delta x_i=0\ \Leftrightarrow\ \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\cdot\delta x_i=0$$

となるので, 両辺を時間積分すれば作用 $S\equiv\int_{t_0}^{t_1}L\ dt$ の停留が得られるのである. 最小作用の原理は, 定性的には運動エネルギーとポテンシャルの差を運動経路に沿って足し合わせた値が停留することを示している. また, 作用の停留に対する Euler 方程式 (Lagrange 方程式と呼ぶ.) は運動方程式に対応することがわかる. Lagrange 方程式は運動方程式とは異なり, 任意の座標変換に対して共変性をもつため, いくつかの力学の問題を簡単にすることができる.[2]

今後の課題

今回扱った内容は汎関数の停留についての諸問題であるが, 一般に停留性は最小性を意味せず, 最小性の証明にはもう少し複雑な理論が必要であるらしい. それらについてもぜひ研究したいものである.

参考文献

[1] I.M.Gelfand, S.V.Fomin, 変分法, 総合図書, 1975.

[2] 前野 昌弘, よくわかる解析力学, 東京図書, 2017.

[3] 畑 浩之, 基幹講座物理学 解析力学, 東京図書, 2014.

[4] L.M.Clous, ファインマンさんの流儀, 早川書房, 2012.

[5] 須藤 靖, 解析力学・量子論, 東京大学出版会, 2008.

[1] T は運動エネルギー, U はポテンシャルを表す.

[2] 共変性をもつ理由については資料を見よ.