Banach-Tarskiの定理

芝浦工業大学　数理科学研究会
BV17077　横井　健

平成 30 年 11 月 3 日

研究動機

以前から選択公理に興味があり, それに関する本を読み進めていたとき,「1 つのボールを有限個に分割して元のボールと同じ形, 同じ大きさなるように組みなおせる」ことをいっている定理を見つけ, あまりにも感覚とあっていないことに興味をもった.

1　歴史

1914 年 Felix Hausdorff によって発表された論文 (Hausdorff の定理[1]) が Banach と Tarski による共同研究のきっかけとなった.

Hausdorff の定理が発表されれから 10 年後に Banach と Tarski は独自に球面全体の複製を許す球面全体に対するパラドックスに拡張する方法を発見した. そして彼らはパラドックスが球体にまで拡張されることを示した. これが Banach-Tarski の定理 (パラドックス) と知られている定理で球体を有限個に分解され, 元の大きさの球体が 2 つに出来るように組み立てなおすことが出来るというものである. またこの定理と同値なもので先のものを複製バージョンとするなら強形バージョンまたは拡大バージョンとにあたる強 Banach-Tarski の定理では, 小さな豆を有限個に分解して, どんな形のどんな大きさの物体にも組み立てなおすことが出来ることを主張している.

しかし数学の用語を用いずにこの定理を幾何学的な簡単な用語で述べることが出来たという事実は, より多くの人の目に届くものになった. この証明が選択公理に依存することと結論が奇妙なものであることにより, 数学者の間で物議をかもしだした. 一方, 一般の人には, この結論だけが注目され「一人の激怒した市民がイリノイ州の学校でこの結果を教えることを禁止することをイリノイ議会に要求した」ということもあったようだ.

それから 40 年間, 集合論, 選択公理, Banach-Tarski の定理に関する論争は解決しないまま激しくなったが, 最終的に Kurt Gdel と Paul Joseph Cohen の業績がこの物語に終止符を打つ形となった.

[1] 資料参考されたし.

2　Banach-Tarski の定理

定義 2.1. (1) $X = Y \sqcup Z \Leftrightarrow X = Y \cup Z$ かつ $Y \cap Z = \emptyset$

(2) $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ を有界部分集合とする. このとき

あある $r = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ が存在して $X \cap (Y + \varepsilon) = \emptyset (Y + \varepsilon := \{(x + a, y + b, z + c) \mid (x, y, z) \in Y\})$ とできる. この r を使って $X \oplus Y :\, = X \sqcup (Y + \varepsilon)$ と定める.

定義 2.2. $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ が分割合同

$\Longleftrightarrow$ ある $n \in \mathbb{N}$ と $X_i, Y_i \subset \mathbb{R}^3$, $\sigma_i \in G_3 (0 \leq i \leq n)$ が存在して $X = X_0 \sqcup \cdots \sqcup X_n, Y = Y_0 \sqcup \cdots \sqcup Y_n, Y_i = \sigma_i X_i$.

命題 2.3. (1) 分割合同 $\sim$ は同値関係

(2) $X_0 \sim Y_0, X_1 \sim Y_1$ ならば $X_0 \oplus X_1 \sim Y_0 \oplus Y_1$ である. 特に $X_0 \cap X_1 = \emptyset, Y_0 \cap Y_1 = \emptyset$ ならば $X_0 \sqcap X_1 \sim Y_0 \sqcap Y_1$ となる.

定理 2.4 (Banach-Tarski の定理)**.**

$B :\, = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ とすれば $B \sim B \oplus B$.

3　強 Banach-Tarski の定理

定理 3.1 (強 Banach-Tarski の定理)**.**

内部が空でない有界部分集合 $X, Y \subset \mathbb{R}$ に対して $X \sim Y$

今後の課題

学習不足により, 理解しきれていない部分が出来てしまった, 今後は全体の流れを見直し, 証明に必要な分野の学習もしていきたい.

参考文献

[1] Leonard M. Wapnaer 著 佐藤かおり, 佐藤 宏樹 訳, バナッハ=タルスキーの逆説 豆と太陽は同じ大きさか?, 青土社, 2009 年.

[2] `http://alg-d.com/math/ac/banach_tarski.pdf`, 2013 年 3 月 24 日.