差分方程式

芝浦工業大学　数理科学研究会
BV18015 大岡舜明

2019 年 05 月 19 日

目次

1　研究背景

大学に行くと数学の分野が細かく分かれ, 何を学習するかより精密に焦点を定めなくてはならない. そんな中, 微分方程式が数学のみならず一般力学でも主として使われ驚いた．微分方程式がこの先当然のように使われると同時に, 差分方程式は極限で微分方程式になるので微分よりも差分の方がより広いクラスの現象を考えるときに役立つ．また授業ではあまり扱わないであろうこそ, 研究に向いていると考え研究テーマに決定した.

2　差分方程式の定義

整数 n の関数 x_n と自然数 s が与えられたとき, 連続した $s+1$ 個の項 $x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+s}$ を考える．差分方程式とはこの列の間の関係式

$$F(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+s}, n) = 0 \quad (n \text{ は整数})$$

のことである．この関係式を s 階の差分方程式という．一般に, s 階の差分方程式では連続した s 項 $x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+s-1}$ を与えると次の項 x_{n+s} の値が決まるが一意的とは限らない．x_{n+s} が $x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+s-1}$ によって一意的に表現されてるときは,

$$x_{n+s} = f(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+s-1}, n) \quad (n \text{ は整数})$$

と表せる．この差分方程式を陽的方程式または漸化式という．x_n を決めるための初めの s 項 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{s-1}$ を s 階の差分方程式の初期値または初期条件という.

例. 上記の式で，$s=1$ の場合 $F=(x_n, x_{n+1}, n)=0$, $x_{n+1}=f(x_n, n)$ という関数である. 具体的に挙げると，$x_{n+1}=x_n+2n+1$ のような方程式.

3　例題

差分方程式を題材にした例題はわりと多い．次のように差分方程式は身の回りで活用できる場面が少なくないことがうかがえる.

3.1　ハノイの塔

中央に穴の開いた大きさの異なる n 個の円板を考え, 一番下が一番大きく上へ行くほどだんだん小さくなるように重ねて木釘 A にはめてあるとする. これらの円板を一度に 1 個づつ動かしながら, 別の木釘 B に移そうと思う. 円板を一時的に置いておくために, もう 1 本の木釘 C が利用できる. なお, 円板を動かす途中で小さい円板の上に大きい円板をおくことができないとする. 木釘 A の n 個の円板を木釘 B に移して元と同じ重なり方になるようにするには最低何回円板をうごかせばよいか.
考え方 n 個の円板を移すのに, まず上の $n-1$ 個の円板を木釘 C に移動させる. そして残された一番大きい円板を木釘 B に移動させる. その後, 木釘 C にある $n-1$ 個の円板を木釘 B に移動させる.
(解答) n 個の円板すべてを別の木釘に動かす最小回数を x_n とする. $n-1$ 個の円板を別の木釘に動

かす回数は x_{n-1} である. 上の考え方より漸化式

$$x_n = 2x_{n-1} + 1, x_1 = 1 \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

が得られる. この漸化式を解く. 特性方程式 $a = 2a + 1$ とたてて解くと $a = -1$. 従ってこの漸化式は

$$x_n + 1 = 2(x_{n-1} + 1)$$

と表せる. ここで $y_n = x_n + 1$ とすれば $y_n = 2y_{n-1}$ となり, $y_1 = x_1 + 1 = 2$ であるからこの数列 $\{y_n\}$ は初項 2 公比 2 の等比数列. よって

$$y_n = 2^n$$

ここで y_n を x_n にもどせば

$$x_n = 2^n - 1$$

となり, x_n が求める回数となる.

3.2 兎のつがい

囲いの中に, 生まれたばかりの 1 つがいの子兎がいたとき,N 月たってこの 1 つがいの兎が合計何つがいに増えるかを知りたい. ただし 1 つがいの親兎はひと月に 1 つがいの子兎を産むとし, 子兎は生まれた次の月で子を産める親兎になりその次の月からこを産めるとする.

考え方 n 月後の親兎のつがいの数を y_n, 子兎のつがいの数を z_n とすると, その次の月,$n+1$ 月後の親兎のつがい数は $y_n + z_n$, 新しく生まれた子兎のつがい数は y_n となる. その次の次の月,$n+2$ 月後の親兎のつがい数は $2y_n + z_n$, 新しく生まれた子兎のつがい数 $y_n + z_n$ となる.

(解答) n 月後のつがい数の総数を $x_n (= y_n + z_n)$ とすると, 上の考え方によって $n+2$ 月後のつがいの総数 $x_{n+2} = 3y_n + 2z_n$ は,n 月後のつがいの総数 $x_n = y_n + z_n$ と $n+1$ 月後のつがいの総数 $x_{n+1} = 2y_n + z_n$ との和になっている. すなわち漸化式は

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

となる. 初期条件は $x_0 = 1, x_1 = 1$ である. この漸化式を解く. 特性方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の二つの解を p, q として解の公式から $p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, q = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ が求まる. よってこの漸化式の一般解は

$$x_n = c_1 p^n + c_2 q^n$$

と表現できる. 初期条件 $x_0 = c_1 + c_2 = 1, x_1 = c_1 p + c_2 q = 1$ を解いて $c_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, c_2 = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ を得る. ゆえに

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]$$

となる.

3.3 階段の上り方

N 段の階段を上がるのに, 一足 1 段または 2 段上がるものとしてその上がり方の数を求める.

考え方 $n+2$ 段まで上がったとき,$n+1$ 段目から 1 段上がったか,n 段目から 2 段上がったかの 2 通

りしかない.
(解答) n 段の階段上がる上がり方の数を x_n と表す. $n+2$ 段の上がり方は上の考え方より $x_{n+1}+x_n$ になる. 従って漸化式は 4.2 と同じ式

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

になる. 初期条件は $x_1 = 1, x_2 = 2$ であり, 先ほどの x_1, x_2 と等しいので解は同じく

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]$$

となる.

4　差分方程式の例

実例をいくつかあげて, それを解きながらどのような方程式, 解があるかを紹介する.

例 1.

$$x_{n+1} = x_n + 2n + 1, x_0 = 0$$

を解く.
(解答) $x_{n+1} - x_n = 2n+1,$ と変形してこの式を $n = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ について書き並べると次のようになる.

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= 2 * 0 + 1 \\ x_2 - x_1 &= 2 * 1 + 1 \\ &\vdots \\ x_n - x_{n-1} &= 2 * (n-1) + 1 \end{aligned}$$

これらを足し合わせると, 左辺は $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ が互いに打ち消し合って, 残るのは $x_n - x_0$ だけとなり, 右辺は $(2*0+1) + (2*1+1) + \cdots + (2*(n-1)+1)$ となる. 従って

$$x_n - x_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)$$

となる. ゆえに

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = 0 + n(n-1) + n = n^2$$

例 2.

$$x_{n+1} - (n+1)x_n = (n+2)!,\ x_0 = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots \text{ また}, 0! = 1)$$

を解く.
(解答) ここでは定数変化法を使ってみよう. この方法ではまず同次方程式

$$\hat{x}_{n+1} = (n+1)\hat{x}_n$$

の解 $\hat{x}_n$ を求める. 次にその解に含まれる任意定数が変化したのが非同次方程式の解であると考える. つまり非同次方程式も同次方程式も解の構造はほとんど同じと見るのである. この式を変形して

$$\frac{\hat{x}_{n+1}}{\hat{x}_n} = n + 1$$

を得る. この式を $n=0,1,2,\cdots,n-1$ について書き並べると次のようになる.

$$\frac{\hat{x}_1}{\hat{x}_0}=0+1$$
$$\frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1}=1+1$$
$$\vdots$$
$$\frac{\hat{x}_n}{\hat{x}_{n-1}}=(n-1)+1$$

これらを掛け合わせると, 左辺は $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ が互いに打ち消し合って, 残るのは $\dfrac{\hat{x}_n}{\hat{x}_0}$ だけとなり, 右辺は $(0+1)*(1+1)*\cdots*(n-1)+1$ となる. 従って

$$\frac{\hat{x}_n}{\hat{x}_0}=\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)$$

が得られる. これより求める同次方程式の解 $\hat{x}_n$ は

$$\hat{x}_n=\hat{x}_0\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)$$

となるが $\hat{x}_0$ の値はわからないので定数 c を使う. 解は $\hat{x}_n=c*n!$ で, 非同次方程式の解では定数 c が変化して n に依存する未知関数 c_n であると仮定して $x_n=c_n*n!,\quad x_0=c_0=1$ を与式に代入すると c_n に対する方程式

$$c_{n+1}(n+1)!-(n+1)c_n n!=(n+2)!,\quad c_{n+1}-c_n=n+2$$

が得られる. この式を解くと

$$c_n=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

となる. 従って

$$x_n=\frac{1}{2}(n+2)!$$

が解である.
解をチェックする.

$$(\text{左辺})=\frac{1}{2}(n+3)!-(n+1)\frac{1}{2}(n+2)!=(n+2)!=(\text{右辺})$$

そして初期値 $x_0=1$, ゆえに解は方程式と初期値を満たしている.

5　より身近な例

差分方程式の定義で与えられた x_n について, n が 1 増えるごとに x_n を微分する操作を行うと, ある関数とその導関数を含んだ等式ができてそれを微分方程式と呼ぶ. n 階微分方程式 $F(x,y,y',y'',\cdots,y^n)=0$ は, より身近な自然現象や社会現象の法則を記述できる.

例 3. ばね (ばね定数 $k>0$) の上端を固定し, 下端に質量 m のおもりをつるす. 釣り合った位置からおもりを a の長さだけ引っ張って静かに話しておもり上下に振動させたときの運動を調べる.

(解答) 座標軸を設定し, ばねの自然長の位置を O, また鉛直下方向に y 軸を取る. 運動方程式 $m\dfrac{d^2y}{dt^2}=F$(ここで m は質量, $\dfrac{d^2y}{dt^2}$は加速度,物体に働く合力を F を表す) を考えると,y 軸正の方向に重力 mg, 負の方向にばねの力 ky が働くから運動方程式は

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=mg-ky=-k(y-\frac{mg}{k})$$

となる. $y-\dfrac{mg}{k}=Y$ とおくと, $dy=dY$ だから先ほどの運動方程式は

$$\frac{d^2Y}{dt^2}=-\frac{k}{m}Y=-\omega^2Y \quad (\omega^2=\frac{k}{m}>0)$$

となる. ここで両辺に $2\dfrac{dY}{dt}$ を掛けると, $2\dfrac{dY}{dt}\dfrac{d^2Y}{dt^2}=-2\omega^2Y\dfrac{dY}{dt}$ すなわち $\dfrac{d}{dt}(\dfrac{dY}{dt})^2=\dfrac{d}{dt}(-\omega^2Y^2)$. 両辺を t で積分すると

$$(\frac{dY}{dt})^2=-\omega^2Y^2+C \quad (C: \text{積分定数})$$

上辺の左辺が 0 以上であるから, $C\geq\omega^2Y^2\geq 0$ となる. そこで $C=\omega^2A^2(\geq 0)$ と任意定数 A を用いて書き換えると

$$(\frac{dY}{dt})^2=\omega^2(A^2-Y^2) \quad \therefore \frac{dY}{dt}=\pm\omega$$

これを変数分離して両辺を積分すると, α を積分定数として

$$\int\frac{dY}{\sqrt{A^2-Y^2}}=\pm\int\omega dt+\alpha \qquad \therefore \cos^{-1}\frac{Y}{A}=\pm(\omega t+\alpha)$$

両方の余弦をとって A を掛ければ

$$Y(t)=A\cos(\omega t+\alpha)=A\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\alpha)$$

ここで, A は振幅を, α は初期位相を表す. Y から y に戻せば

$$y(t)=\frac{mg}{k}+A\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\alpha)$$

おもりを振動させたときは, 釣り合った位置から長さ a だけ引っ張ったのだから, $A=a$ である. また

$$\frac{dy}{dt}=-a\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\alpha)$$

より, $t=0$ での速度 $\dfrac{dy}{dt}$ が 0 であるから $0=-a\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\alpha \quad \therefore \alpha=0$. よって求める解は

$$y(t)=\frac{mg}{k}+a\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$$

6　境界値問題

初期条件を満たす解を求める, いわゆる初期値問題というのがある. 例えば,2 階差分方程式の $x=0,1$ における値を指定することによって,$x=2,3,\cdots$ における値を定める問題であった. 変数 x が時間をあらわすときは, 現在の状態から将来の状態を決めるという意味で, このような問題になるのである. しかし x が空間的な順序を意味しているような場合, 例えば離れた 2 点 $x=0,N(N>1)$ における値 $U(0),U(N)$ を与えて, これに挟まれた点 $x=1,2,\cdots,N-1$ における値を求めるというような問題が生じてくる. $U(0),U(N)$ を解の境界値といい, 境界値を指定することは, 境界 $x=0,N(N>1)$ における条件であるから, 境界条件と呼ばれる.
一般解に含まれる任意定数の数だけの個数の条件を与えるという点では, 初期条件も境界条件も同じであるが, 境界条件を与えたときは, 解の一意性が必ずしも保証されないことに注意する.

例 4. 差分方程式

$$U(x-1)-aU(x)+U(x+1)=0 \quad (x=1,2,3) \tag{1}$$

に対して, 境界条件

$$U(0)=U(4)=0 \tag{2}$$

を与えたとき,0 以外の解があるかどうかしらべよう. $x=1,2,3$ における (1) を書いてみると (2) を考慮して,

$$\begin{aligned} -aU(1)+U(2)&=0 \\ U(1)-aU(2)+U(3)&=0 \\ U(2)-aU(3)&=0 \end{aligned} \tag{3}$$

となる. これは,$U(1),U(2),U(3)$ を未知数とする 3 元 1 次の連立方程式である. まず第 2 の式に a を掛けて第 3 の式に加えると,$U(3)$ が消去され $(1-a^2)U(2)+aU(1)=0$ となる. これと第 1 の式から $U(2)$ を消去すれば,

$$a(2-a^2)U(1)=0$$

となるが, もし $U(1)=0$ ならば (3) から $U(2)=U(3)=0$ が得られるから, 全部が 0 でない解があるとすれば,$U(1)\neq 0$ でなければいけない. そこで, 上の式を $U(1)$ で割って,

$$a(2-a^2)=0 \tag{4}$$

が得られる. この根は,$a_1=\sqrt{2},a_2=0,a_3=-\sqrt{2}$ である. そこで $a=a_i(i=1,2,3)$ とおけば, 実際 (3) を解くことができて次のようになる. ただし,a_i に対応する解を $U_i(x)$ と書き,$U_i(1)=C_i$ とおいた. C_i は任意定数である.

i	a_i	$U_i(0)$	$U_i(1)$	$U_i(2)$	$U_i(3)$	$U_i(4)$
1	$\sqrt{2}$	0	C_1	$\sqrt{2}C_1$	C_1	0
2	0	0	C_2	0	$-C_2$	0
3	$-\sqrt{2}$	0	C_3	$-\sqrt{2}C_3$	C_3	0

これで問題が解かれたわけで,(1) は,$a = a_i (i = 1, 2, 3)$ のときに限り, 恒等的に 0 ではない解をもつのである.

7　今後の課題

参考文献

[1] 差分と超離散,　広田良吾, 高橋大輔,　共立出版, 2003 年.

[2] 物理数学コース　常微分方程式, 渋谷仙吉, 内田伏一, 裳華堂, 1998 年

[3] 吉田洋一監修　新数学シリーズ　差分方程式　高橋健人　培風館　1961 年