Newton 法の失敗例のうち周期 3 でループする 3 次式関数

BV17049　丹内　僚梧

令和元年 5 月 17 日

目次

研究背景

Newton 法は初期値に依存し, その値によっては失敗することもありうる. 失敗例としては二種類考えられる. 一つは x_n から次の x_{n+1} が求められないもの. もう一つは計算は続けることができるが値が解に近づかないものである。後者においてはループするものも含まれる。ループするものとしては $x_0 = x_2 = \cdots, x_1 = x_3 = \cdots$ という, 周期 2 でループするものだ. そこで周期 3 でループするものが存在するのか気になり、研究の着手に至った。

1 前提知識

1.1 Newton 法について

1.2 Newton 法の失敗例の説明

失敗する場合としては次の二つがあり得る. $(a)x_n$ から x_{n+1} を求めることができない. (b) 計算は続くが, x_n が収束しない. 以下はその二つの場合の具体例である.

(a) の具体例
(b) の具体例

2 研究内容

周期 3 のループになるような 3 次関数はあるのか. あるとしたら, それは一体どのような関数であるのか. またそれ以上に大きな周期を持つ関数, 例えば周期 4 のループを持つような 4 次関数や周期 5 のループを持つような 5 次関数は存在するのか.

3 研究方針

周期 3 を持つ関数としてはおそらく一番い簡単なものである単純な三次関数を考える. さらに簡単のために, 3 次の係数を 1 のものに限定する. つまり, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ に限定して考える. まず, 周期 3 で回る 3 点を x_0, x_1, x_2 として連立方程式を立て, a, b, c について解く. a, b, c は x_0, x_1, x_2 を変数とする関数として表される. そこで x_0, x_1, x_2 に適当な値を代入し, 周期 3 となる $f(x)$ を求めることとする.

4 Newton 法

Newton 法の関係式は以下のようになる.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

このとき, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ なので, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ となる. よって,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + ax_n^2 + bx_n + c}{3x_n^2 + 2ax_n + b}$$

となるので,

$$g(x) = x - \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{3x^2 + 2ax + b}$$

とおく.

5 連立方程式

周期 3 のために, 以下の連立方程式が成り立つ.

$$\left\{\begin{array}{ll} g(x_0) & = x_1 \\ g(x_1) & = x_2 \\ g(x_2) & = x_3 \end{array}\right.$$

つまり,

$$\left\{\begin{array}{ll} x_0 - \frac{ax_0^2+bx_0+c+x_0^3}{2ax_0+b+3x_0^2} & = x_1 \\ x_1 - \frac{ax_1^2+bx_1+c+x_1^3}{2ax_1+b+3x_1^2} & = x_2 \\ x_2 - \frac{ax_2^2+bx_2+c+x_2^3}{2ax_2+b+3x_2^2} & = x_3 \end{array}\right.$$

これを解くと,

$$\left\{\begin{array}{ll} a & = -\frac{(x_1-x_2)\left(-2x_0^3+3x_1x_0^2-3x_2^2x_0+2x_2^3\right)+(x_1-x_0)\left(2x_0^3-3x_1x_0^2+x_1^2(3x_2-2x_1)\right)}{(x_1-x_0)(x_0^2-2x_1x_0-x_1(x_1-2x_2))+(x_1-x_2)(-x_0^2+2(x_1-x_2)x_0+x_2^2)} \\ b & = \frac{4x_2x_0^4+\left(2x_1^2-10x_2x_1-5x_2^2\right)x_0^3+\left(-5x_1^3+9x_2x_1^2+9x_2^2x_1+2x_2^3\right)x_0^2+x_1\left(4x_1^3-10x_2x_1^2+9x_2^2x_1-10x_2^3\right)x_0+x_1x_2^2\left(2x_1^2-5x_2x_1+4x_2^2\right)}{x_0^3-(2x_1+x_2)x_0^2-(x_1^2-6x_2x_1+2x_2^2)x_0+x_1^3+x_2^3-x_1x_2^2-2x_1^2x_2} \\ c & = \frac{-2\left(x_1^2-2x_2x_1+2x_2^2\right)x_0^4+x_1x_2\left(4x_1^3-9x_2x_1^2+6x_2^2x_1+4x_2^3\right)x_0+x_1^2x_2^2\left(-2x_1^2+5x_2x_1-4x_2^2\right)}{x_0^3-(2x_1+x_2)x_0^2-(x_1^2-6x_2x_1+2x_2^2)x_0+x_1^3+x_2^3-x_1x_2^2-2x_1^2x_2} \\ & \quad +\frac{x_0^3\left(5x_1^3-9x_2x_1^2+6x_2^2x_1+5x_2^3\right)-x_0^2\left(4x_1^4-6x_2x_1^3+9x_2^3x_1+2x_2^4\right)}{x_0^3-(2x_1+x_2)x_0^2-(x_1^2-6x_2x_1+2x_2^2)x_0+x_1^3+x_2^3-x_1x_2^2-2x_1^2x_2} \end{array}\right.$$

6 具体的な関数

周期 3 の関数には 2 種類考えられる. それは x_0, x_1, x_2 の大小による区別である. まず, x_0 を最小のものとして固定する. すると $x_0 < x_1 < x_2$, $x_0 < x_2 < x_1$ と分けられる. 前者を反時計回りの関数, 後者を時計回りの関数と呼ぶことにする.

6.1 反時計回りの関数

$x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$ とすると, $a = -15, b = 59, c = -77$ となるので, 関数は以下のようになる.

$$f(x) = x^3 - 15x^2 + 59x - 77$$

なので,

$$f'(x) = 3x^2 - 30x + 59x$$

であるから,

$$g(x) = x - \frac{x^3 - 15x^2 + 59x - 77}{3x^2 - 30x + 59}$$

となり, $g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 1$ が成り立つので, 周期 3 でループすることが確認できる.

6.2 時計回りの関数

$x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 2$ とすると, $a = 3, b = -13, c = 17$ となるので, 関数は以下のようになる.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 13x + 17$$

なので,

$$f(x) = 3x^2 + 6x^2 - 13$$

であるから,

$$g(x) = x - \frac{x^3 + 3x^2 - 13x + 17}{3x^2 + 6x - 13}$$

となる. $g(1) = 3, g(3) = 2, g(2) = 1$ が成り立つので, 周期 3 でループすることが確認できる.

7 さらに大きな周期を持つ関数

7.1 周期 4

周期 3 と同様に考えるが, 周期 4 のループになるような 4 次関数は見つけることができなかったので, 5 次関数から見つけることとする. 周期 3 と同様に簡単にするために, x^5, x^4 の係数が 1 である関数に限定する. つまり $f(x) = x^5 + x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ に限定して考えるものとする. まず, 周期 4 で回る 4 点を x_0, x_1, x_2, x_3 として連立方程式を立て, a, b, c, d について解く. a, b, c, d は x_0, x_1, x_2, x_3 を変数とする関数として表される. そこで x_0, x_1, x_2, x_3 に適当な値を代入し, 周期 4 となる $f(x)$ を求めることとする.

$$f(x) = x^5 + x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

なので,

$$f(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

であるから,

$$g(x) = x - \frac{x^5 + x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d}{5x^4 + 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c}$$

周期 4 のために, 以下の連立方程式が成り立つ.

$$\begin{cases} g(x_0) & = x_1 \\ g(x_1) & = x_2 \\ g(x_2) & = x_3 \\ g(x_3) & = x_4 \end{cases}$$

つまり,

$$\begin{cases} x_0 - \frac{x_0^5+x_0^4+ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d}{5x_0^4+4x_0^3+3ax_0^2+2bx_0+c} & = x_1 \\ x_1 - \frac{x_1^5+x_1^4+ax_1^3+bx_1^2+cx_1+d}{5x_1^4+4x_1^3+3ax_1^2+2bx_1+c} & = x_2 \\ x_2 - \frac{x_2^5+x_2^4+ax_2^3+bx_2^2+cx_2+d}{5x_2^4+4x_2^3+3ax_2^2+2bx_2+c} & = x_3 \\ x_3 - \frac{x_3^5+x_3^4+ax_3^3+bx_3^2+cx_3+d}{5x_3^4+4x_3^3+3ax_3^2+2bx_3+c} & = x_0 \end{cases}$$

これらを解くと,

となる. x_0, x_1, x_2, x_3 に値を代入することで, 周期 4 でループする 5 次関数を求めることができる. ここで周期 3 の場合と同様に, ループの仕方にもいくつかの分け方が考えられる. x_0, x_1, x_2, x_3 の大小による区別である. まず, x_0 を最小のものとして固定する. すると

$$\begin{cases} x_0 < x_1 < x_2 < x_3 & (1) \\ x_0 < x_1 < x_2 < x_3 & (2) \\ x_0 < x_1 < x_3 < x_2 & (3) \\ x_0 < x_3 < x_1 < x_2 & (4) \\ x_0 < x_2 < x_3 < x_1 & (5) \\ x_0 < x_3 < x_2 < x_1 & (6) \end{cases}$$

6 種類に分けられる. (1), (2), (3) と (6), (5), (4) はそれぞれ時計回り, 反時計回りの関係にある. (2), (3), (4), (5) となるような値を見つけることができなかったので, 以下では (1), (6) の二つの場合の具体例を示す.

(1) の場合

$x_0 = 30, x_1 = 29, x_2 = 27, x_3 = 26$ とすると, $a = -7721, b = 424155, c = -8753160, d = 64219740$ となるので, 関数は以下のようになる.

$$f(x) = x^5 + x^4 - 7721x^3 + 424155x^2 - 8753160x + 64219740$$

なので,

$$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 23163x^2 + 848310x - 8753160$$

であるから,

$$g(x) = x - \frac{x^5 + x^4 - 7721x^3 + 424155x^2 - 8753160x + 64219740}{5x^4 + 4x^3 - 23163x^2 + 848310x - 8753160}$$

となる. $g(30) = 29, g(29) = 27, g(27) = 26, g(26) = 30$ が成り立つので, 周期 4 でループすることが確認できる.

(6) の場合

$x_0 = 30, x_1 = 29, x_2 = 27, x_3 = 26$ とすると, $a = -7721, b = 424155, c = -8753160, d = 64219740$ となるので, 関数は以下のようになる.

$$f(x) = x^5 + x^4 - 7721x^3 + 424155x^2 - 8753160x + 64219740$$

なので,

$$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 23163x^2 + 848310x - 8753160$$

であるから,

$$g(x) = x - \frac{x^5 + x^4 - 7721x^3 + 424155x^2 - 8753160x + 64219740}{5x^4 + 4x^3 - 23163x^2 + 848310x - 8753160}$$

となる. $g(30) = 29, g(29) = 27, g(27) = 26, g(26) = 30$ が成り立つので, 周期 4 でループすることが確認できる.

7.2 周期 5

周期 3 と同様に考える. 周期 3 と同様に簡単にするために, x^5 の係数が 1 である関数に限定する. つまり $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ に限定して考えるものとする. まず, 周期 5 で回る 5 点を x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 として連立方程式を立て, a, b, c, d, e について解く. a, b, c, d, e は x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 を変数とする関数として表される. そこで x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 に適当な値を代入し, 周期 5 となる $f(x)$ を求めることとする.

$$f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

なので,

$$f(x) = 5x^4 + 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

であるから,

$$g(x) = x - \frac{x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}{5x^4 + 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d}$$

周期 5 のために, 以下の連立方程式が成り立つ.

$$\begin{cases} g(x_0) & = x_1 \\ g(x_1) & = x_2 \\ g(x_2) & = x_3 \\ g(x_3) & = x_4 \\ g(x_4) & = x_0 \end{cases}$$

つまり,

$$\begin{cases} x_0 - \frac{x_0^5 + ax_0^4 + bx_0^3 + cx_0^2 + dx_0 + e}{5x_0^4 + 4ax_0^3 + 3bx_0^2 + 2cx_0 + d} & = x_1 \\ x_1 - \frac{x_1^5 + ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e}{5x_1^4 + 4ax_1^3 + 3bx_1^2 + 2cx_1 + d} & = x_2 \\ x_2 - \frac{x_2^5 + ax_2^4 + bx_2^3 + cx_2^2 + dx_2 + e}{5x_2^4 + 4ax_2^3 + 3bx_2^2 + 2cx_2 + d} & = x_3 \\ x_3 - \frac{x_3^5 + ax_3^4 + bx_3^3 + cx_3^2 + dx_3 + e}{5x_3^4 + 4ax_3^3 + 3bx_3^2 + 2cx_3 + d} & = x_4 \\ x_4 - \frac{x_4^5 + ax_4^4 + bx_4^3 + cx_4^2 + dx_4 + e}{5x_4^4 + 4ax_4^3 + 3bx_4^2 + 2cx_4 + d} & = x_0 \end{cases}$$

これらを解くと,

となる. x_0, x_1, x_2, x_3 に値を代入することで, 周期 5 でループする 5 次関数を求めることができる. ここで周期 3 の場合と同様に, ループの仕方にもいくつかの分け方が考えられる. $x_0, x_1, x_2, x_3, x4$

の大小による区別である．まず, x_0 を最小のものとして固定する．すると

$$\begin{cases} x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 & (1) \\ x_0 < x_2 < x_1 < x_3 < x_4 & (2) \\ x_0 < x_1 < x_3 < x_2 < x_4 & (3) \\ x_0 < x_3 < x_1 < x_2 < x_4 & (4) \\ x_0 < x_2 < x_3 < x_1 < x_4 & (5) \\ x_0 < x_3 < x_2 < x_1 < x_4 & (6) \\ x_0 < x_1 < x_2 < x_4 < x_3 & (7) \\ x_0 < x_2 < x_1 < x_4 < x_3 & (8) \\ x_0 < x_1 < x_4 < x_2 < x_3 & (9) \\ x_0 < x_4 < x_1 < x_2 < x_3 & (10) \\ x_0 < x_2 < x_4 < x_1 < x_3 & (11) \\ x_0 < x_4 < x_2 < x_1 < x_3 & (12) \\ x_0 < x_1 < x_3 < x_4 < x_2 & (13) \\ x_0 < x_3 < x_1 < x_4 < x_2 & (14) \\ x_0 < x_1 < x_4 < x_3 < x_2 & (15) \\ x_0 < x_4 < x_1 < x_3 < x_2 & (16) \\ x_0 < x_3 < x_4 < x_1 < x_2 & (17) \\ x_0 < x_4 < x_3 < x_1 < x_2 & (18) \\ x_0 < x_2 < x_3 < x_4 < x_1 & (19) \\ x_0 < x_3 < x_2 < x_4 < x_1 & (20) \\ x_0 < x_2 < x_4 < x_3 < x_1 & (21) \\ x_0 < x_4 < x_2 < x_3 < x_1 & (22) \\ x_0 < x_3 < x_4 < x_2 < x_1 & (23) \\ x_0 < x_4 < x_3 < x_2 < x_1 & (24) \end{cases}$$

24 種類に分けられる．(1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), (12) と (24), (23), (22), (21), (20), (19), (18), (17), (16), (15), (14), (13) はそれぞれ時計回り, 反時計回りの関係にある．(2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13), (14), (15), (16), (17), (18), (19), (20), (21), (22), (23) となるような値を見つけることができなかったので, 以下では (1), (24) の二つの場合の具体例を示す.

(1) の場合

$x_0 = 30, x_1 = 29, x_2 = 27, x_3 = 26$ とすると, $a = -7721, b = 424155, c = -8753160, d = 64219740$ となるので, 関数は以下のようになる.

$$f(x) = x^5 + x^4 - 7721x^3 + 424155x^2 - 8753160x + 64219740$$

なので,

$$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 23163x^2 + 848310x - 8753160$$

であるから,

$$g(x) = x - \frac{x^5 + x^4 - 7721x^3 + 424155x^2 - 8753160x + 64219740}{5x^4 + 4x^3 - 23163x^2 + 848310x - 8753160}$$

となる．$g(30) = 29, g(29) = 27, g(27) = 26, g(26) = 30$ が成り立つので, 周期 4 でループすることが確認できる.

(24) の場合

$x_0 = 30, x_1 = 29, x_2 = 27, x_3 = 26$ とすると，$a = -7721, b = 424155, c = -8753160, d = 64219740$ となるので, 関数は以下のようになる.

$$f(x) = x^5 + x^4 - 7721x^3 + 424155x^2 - 8753160x + 64219740$$

なので,

$$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 23163x^2 + 848310x - 8753160$$

であるから,

$$g(x) = x - \frac{x^5 + x^4 - 7721x^3 + 424155x^2 - 8753160x + 64219740}{5x^4 + 4x^3 - 23163x^2 + 848310x - 8753160}$$

となる．$g(30) = 29, g(29) = 27, g(27) = 26, g(26) = 30$ が成り立つので, 周期 4 でループすることが確認できる.

8　今後の課題

今回は周期 3 でループする関数を具体的に探すのみにとどまったが, それがどういった一般性を持つものなのかといった点にまで進めることができれば考えている．また研究途中で周期 2 を持つ 2 次関数と周期 4 を持つ 4 次関数を探したが見つけることができなかった, なので, 周期 $2n$ を持つ $2n$ 次関数は存在しないのではないかという仮説も浮かんだ．この仮説が正しいにしろ間違っているにせよ, 何らかの形で決着をつけたいと思う.

参考文献

[1] Donald E.Knuth 著, 鷺谷好輝 訳, TeX ブック コンピュータによる組版システム, アスキー, 1989.

[2] 奥村晴彦, 黒木祐介, [改訂第 7 版] LaTeX 2_ε 美文書作成入門, 技術評論社, 2017.