差分方程式

芝浦工業大学　数理科学研究会
BV18015 大岡舜明

2019 年 05 月 19 日

1　研究背景

前回の研究でこのテーマの中でも面白い部分を見つけて発表したいと考えており, 今回境界値問題という結果でなく過程を考える問題に出会って興味が引かれたので紹介する.

2　差分方程式の定義

整数 n の関数 x_n と自然数 s が与えられたとき, 連続した $s+1$ 個の項 $x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+s}$ を考える.　差分方程式とはこの列の間の関係式

$$F(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+s}, n) = 0 \ \ (n \text{ は整数})$$

のことである.　この関係式を s 階の差分方程式という.　一般に, s 階の差分方程式では連続した s 項 $x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+s-1}$ を与えると次の項 x_{n+s} の値が決まるが一意的とは限らない.　x_{n+s} が $x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+s-1}$ によって一意的に表現されてるときは,

$$x_{n+s} = f(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+s-1}, n) \ \ (n \text{ は整数})$$

と表せる.

3　境界値問題

初期条件を満たす解を求める, いわゆる初期値問題というのがある. 変数 x が時間を表すときは, 現在の状態から将来の状態を決めるという意味で, このような問題になるのである. しかし x が空間的な順序を意味しているような場合, 例えば離れた 2 点 $x = 0, N(N > 1)$ における値 $U(0), U(N)$ を与えて, これに挟まれた点 $x = 1, 2, \cdots, N-1$ における値を求めるというような問題が生じてくる. $U(0), U(N)$ を解の境界値といい, 境界値を指定することは, 境界 $x = 0, N(N > 1)$ における条件であるから, 境界条件と呼ばれる.

例 1

$$U(x-1) - aU(x) + U(x+1) = 0 \ \ (x = 1, 2, 3) \tag{1}$$

$$U(0) = U(4) = 0 \tag{2}$$

差分方程式 (1) に対して, 境界条件 (2) を与えたとき,0 以外の解があるかどうか調べよう. $x = 1, 2, 3$ における (1) を書いてみると (2) を考慮して,

$$\begin{aligned} -aU(1) + U(2) &= 0 \\ U(1) - aU(2) + U(3) &= 0 \\ U(2) - aU(3) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

となる. これは,$U(1), U(2), U(3)$ を未知数とする連立方程式である. この式から $U(2), U(3)$ を消去すれば,

$$a(2 - a^2)U(1) = 0$$

となるが, もし $U(1) = 0$ ならば (3) から $U(2) = U(3) = 0$ が得られるから, 全部が 0 でない解があるとすれば,$U(1) \neq 0$ でなければいけない. そこで, 上の式を $U(1)$ で割って,

$$a(2 - a^2) = 0 \tag{4}$$

が得られる. この根は,$a_1 = \sqrt{2}, a_2 = 0, a_3 = -\sqrt{2}$ である. そこで $a = a_i (i = 1, 2, 3)$ とおけば, 実際 (3) を解くことができて次のようになる. ただし,a_i に対応する解を $U_i(x)$ と書き,$U_i(1) = C_i$ とおいた. C_i は任意定数である.

i	a_i	$U_i(0)$	$U_i(1)$	$U_i(2)$	$U_i(3)$	$U_i(4)$
1	$\sqrt{2}$	0	C_1	$\sqrt{2}C_1$	C_1	0
2	0	0	C_2	0	$-C_2$	0
3	$-\sqrt{2}$	0	C_3	$-\sqrt{2}C_3$	C_3	0

4　今後の課題

研究内容をより明確にする. もっと面白い部分を見つけて発表したい.

参考文献

[1] 差分と超離散　広田良吾　高橋大輔　共立出版　2003 年.

[2] 吉田洋一監修　新数学シリーズ　差分方程式　高橋健人　培風館　1961 年.