Newton 法の失敗例のうち周期 3 でループする 3 次式関数

BV17049　丹内　僚梧

令和元年 5 月 17 日

研究背景

Newton 法は初期値に依存し, その値によっては失敗することもありうる．失敗例としては二種類考えられる．一つは x_n から次の x_{n+1} が求められないもの．もう一つは計算は続けることができるが値が解に近づかないものである。後者においてはループするものも含まれる。ループするものとしては $x_0 = x_2 = \cdots$, $x_1 = x_3 = \cdots$ という, 周期 2 でループするものだ．そこで周期 3 でループするものが存在するのか気になり、研究の着手に至った。

1　研究方針

周期 3 を持つ関数としてはおそらく一番い簡単なものである単純な三次関数を考える．さらに簡単のために, 3 次の係数を 1 のものに限定する．つまり, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ に限定して考える．まず, 周期 3 で回る 3 点を x_0, x_1, x_2 として連立方程式を立て, a, b, c について解く．a, b, c は x_0, x_1, x_2 を変数とする関数として表される．そこで x_0, x_1, x_2 に適当な値を代入し, 周期 3 となる $f(x)$ を求めることとする．

2　Newton 法

Newton 法の関係式は

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

となる．このとき, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ なので, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ となる．よって,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + ax_n^2 + bx_n + c}{3x_n^2 + 2ax_n + b}$$

となるので,

$$g(x) = x - \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{3x^2 + 2ax + b}$$

とおく．

3　連立方程式

周期 3 のために,

$$\begin{cases} g(x_0) & = x_1 \\ g(x_1) & = x_2 \\ g(x_2) & = x_3 \end{cases}$$

という, 連立方程式が成り立つ．

4　具体的な関数

周期 3 の関数には 2 種類考えられる．それは x_0, x_1, x_2 の大小による区別である．まず, x_0 を最小のものとして固定する．すると $x_0 < x_1 < x_2$, $x_0 < x_2 < x_1$ と分けられる．前者を反時計回りの関数, 後者を時計回りの関数と呼ぶことにする．

4.1　反時計回りの関数

$x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$ とすると, $a = -15, b = 59, c = -77$ なので, 関数は

$$f(x) = x^3 - 15x^2 + 59x - 77$$

となり,

$$g(x) = x - \frac{x^3 - 15x^2 + 59x - 77}{3x^2 - 30x + 59}$$

となり, $g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 1$ が成り立つので, 周期 3 でループすることが確認できる．

4.2　時計回りの関数

$x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 2$ とすると, $a = 3, b = -13, c = 17$ となる, 関数は

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 13x + 17$$

であり,

$$g(x) = x - \frac{x^3 + 3x^2 - 13x + 17}{3x^2 + 6x - 13}$$

となる．$g(1) = 3, g(3) = 2, g(2) = 1$ が成り立つので, 周期 3 でループすることが確認できる．

5　周期 4 の関数

周期 3 と同様に, x_0, x_1, x_2, x_3 の並び方で 6 種類の関数が考えられる．しかし, 今回の研究で見つけれらたのはそのうちの二つのみであり, それらを紹介する．

$$f(x) = x^5 + x^4 - 3480x^3 + 98901x^2 - 967032x + 2940624$$
$$f(x) = x^5 + x^4 - 16100x^3 + 1248175x^2 - 35772500x + 363287500$$

というものであり, 前者は, $g(12) = 24, g(24) = 18, g(18) = 15, g(15) = 12$ で, 後者は, $g(20) = 25, g(25) = 30, g(30) = 50, g(50) = 20$ となり, 周期 4 で回ることがわかる．

6　今後の課題

今回は周期 3 でループする関数を具体的に探すのみにとどまったが, それがどういった一般性を持つものなのかといった点にまで進めることができれば考えている．また研究途中で周期 2 を持つ 2 次関数と周期 4 を持つ 4 次関数を探したが見つけることができなかった, なので, 周期 $2n$ を持つ $2n$ 次関数は存在しないのではないかという仮説も浮かんだ．この仮説が正しいにしろ間違っているにせよ, 何らかの形で決着をつけたいと思う．

参考文献

水島 二郎, 柳瀬 眞一郎, 理工学のための数値計算法, 数理工学社, 2009.