特殊相対性理論と Maxwell 方程式

芝浦工業大学　数理科学研究会
BV19321 豊嶋 祐人

令和元年 5 月 19 日

1　はじめに

古典電磁気学の基礎方程式である Maxwell 方程式は特殊相対性理論と密接な関係にある. かの Lorentz 変換も Maxwell 方程式が共変に保たれるような慣性系間の座標変換として発案されたものであるし, Maxwell 方程式は 4 元ベクトルを用いることで少数の式に統一される. ここでは Newton 力学と古典電磁気学の基本的な知識を仮定してそれらを交えた特殊相対性理論の変遷を追う.

2　狭義の Lorentz 変換

Lorentz は彼の電子論の立場から Maxwell 方程式が (運動方程式とは異なり)Galilei 共変性をもたないことに着目し, Maxwell 方程式が共変に保たれるような慣性系間の座標変換として以下の Lorentz 変換を発案した.[1]

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0), \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3$$
$$(\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta \equiv V/c)$$

Lorentz 変換は形式上 Galilei 変換を内包し, のちに Einstein は以下の要請からこの変換が得られるとした.[2]

特殊相対性理論の基本要請

・相対性原理 $\cdots$ すべての慣性系において物理法則は同じ形で書かれる.
・光速不変の原理 $\cdots$ すべての慣性系において光速は不変である.

また, 慣性系間の変換として座標と同様の形で変換される 4 組の物理量を 4 元ベクトル (4-vector) と呼ぶ.

3　広義の Lorentz 変換

狭義の Lorentz 変換では $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$ が常に成り立つから, $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$ が保たれるような座標変換を広義の Lorentz 変換とする.[3] よって通常の空間回転も Lorentz 変換であるから, 任意の方向への Lorentz 変換を考えることができる.

4　Minkowski 空間

反変ベクトルどうしの内積 (inner product) を $<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> \equiv u^0v^0 - u^1v^1 - u^2v^2 - u^3v^3$ で定めれば, 計量テンソルは以下のように表される.

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

このような内積空間を Minkowski 空間と呼び, 広義の Lorentz 変換は $x^\mu x_\mu = \text{const.}$ を満たす線形変換として捉えられる.

5　Maxwell 方程式のポテンシャル表現

場とポテンシャルの関係式は (磁場に関する)Gauss の法則と電磁誘導則に由来したから, 残りの Maxwell 方程式をポテンシャルを用いて書き換える. まず, Maxwell 方程式は Lorentz 条件を含めた以下の 3 つの方程式として書かれる.[4]

$$\Box\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \mu_0\boldsymbol{j} = \Box\boldsymbol{A}, \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{A} = 0$$

ここで, 反変ベクトルによる偏微分は Lorentz 変換と対称的に変換されるから共変ベクトルの性質をもち, これを ∂_μ と表記する. 同様に共変ベクトルによる偏微分は反変ベクトルの性質をもつから, これを ∂^μ と表記する.

よって 4 元ポテンシャル (4-potential) $A^\mu \equiv (\phi/c, \boldsymbol{A})$ を用いれば, Maxwell 方程式は以下の形で書かれる.[5]

Maxwell 方程式のポテンシャル表現

$$\partial^\nu\partial_\nu A^\mu = \mu_0 j^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3), \qquad \partial_\mu A^\mu = 0$$

今後の課題

特殊相対性理論についてはその出来から発展的な話題まで考えることができたから, これから一般相対性理論について触れてみたいと思う.

参考文献

[1] 江沢 洋, 相対性理論, 裳華房, 2008.

[1] Lorentz は Michelson-Morley の実験結果に対して Lorentz 収縮を提案したが, この収縮は Lorentz 変換から得られる.
[2] 特殊相対性理論ではすべての慣性系は平等であるから Einstein は Lorentz と異なりエーテルの存在を仮定しない.
[3] このことは特殊相対性理論の基本要請と矛盾しない.
[4] この条件は連続の式から得られるから古典電磁気学と矛盾せず, 連続の式は Maxwell 方程式に含まれるからこの条件はあくまでも式変形の便宜である.
[5] Maxwell 方程式は Lorentz 変換に対して共変であるから, 4 元ポテンシャルは反変ベクトルである.