Newton 法の失敗例のうち周期 3 でループする 3 次式関数

BV17049　丹内 僚梧

芝浦工業大学 数理科学研究会

May 19, 2019

研究背景

Newton 法は初期値に依存し, その値によっては失敗することもありうる. 失敗例としては二種類考えられる. 一つは x_n から次の x_{n+1} が求められないもの. もう一つは計算は続けることができるが値が解に近づかないものである。後者においてはループするものも含まれる。ループするものとしては $x_0 = x_2 = \cdots$, $x_1 = x_3 = \cdots$ という, 周期 2 でループするものだ. そこで周期 3 でループするものが存在するのか気になり、研究の着手に至った。

NEwton 法について

Newton 法は, まず予想される真の解に近いと思われる値を一つとり, そのグラフの接線を考え, x 切片を求める. この x 切片の値は, 予想される真の解により近いものになののが一般的である. 以後, この値に対してそこでグラフの接線を考え, 同じ操作を繰り返す. このとき, Newton 法の関係式は,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

となる. そして Newton 法は初期値に依存し, その値によっては失敗することもありうる.

(a) の具体例

$f(x) = x^2 - 4$ のとき, $g(x) = x - \frac{x^2-4}{2x}$ となる. ここで, $x_0 = 0$ をとると, 次の x_1 の値を求めることができない.

(b) の具体例

$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3$ のとき, $g(x) = x - \frac{x^3-3x^2+x+3}{3x^2-6x+1}$ である. ここで, $x_0 = 1$ をとると, $g(1) = 2$ より, $x_1 = 2$ となる. 次に, $g(2) = 2$ より, $x_2 = 1$ となる. 以上より, $x_0 = x_2 = \cdots = 1$ で, $x_1 = x_3 = \cdots = 2$ となる. これが具体例としてよくある周期 2 でループする 3 次関数である.

周期 3 のループになるような 3 次関数はあるのか. あるとしたら, それは一体どのような関数であるのか. またそれ以上に大きな周期を持つ関数, 例えば周期 4 のループを持つような 4 次関数や周期 5 のループを持つような 5 次関数は存在するのか.

研究方針

周期 3 を持つ関数としてはおそらく一番い簡単なものである単純な 3 次関数を考える. さらに簡単のために, 3 次の係数を 1 のものに限定する. つまり, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ に限定して考える. まず, 周期 3 で回る 3 点を x_0, x_1, x_2 として連立方程式を立て, a, b, c について解く. a, b, c は x_0, x_1, x_2 を変数とする関数として表される. そこで x_0, x_1, x_2 に適当な値を代入し, 周期 3 となる $f(x)$ を求める.

Zorn の補題

4) $\Rightarrow$ 5): 資料 3.1 2) の例で示したように, 順序集合の中で, 部分集合が全順序であるという性質は有限性の性質である. 従って 4) を仮定すれば 5) が成り立つ.

Newton 法

Newton 法の関係式は

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

であるから,$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ より, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ となるので,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + ax_n^2 + bx_n + c}{3x_n^2 + 2ax_n + b}$$

となるので,

$$g(x) = x - \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{3x^2 + 2ax + b}$$

とおく.

連立方程式

周期 3 **のために**, **以下の連立方程式が成り立つ**.

$$
\begin{cases}
g(x_0) & = x_1 \\
g(x_1) & = x_2 \\
g(x_2) & = x_3
\end{cases}
$$

つまり,

$$
\begin{cases}
x_0 - \frac{ax_0^2+bx_0+c+x_0^3}{2ax_0+b+3x_0^2} & = x_1 \\
x_1 - \frac{ax_1^2+bx_1+c+x_1^3}{2ax_1+b+3x_1^2} & = x_2 \\
x_2 - \frac{ax_2^2+bx_2+c+x_2^3}{2ax_2+b+3x_2^2} & = x_3
\end{cases}
$$

これを解くと,

$$
\begin{cases}
a &= -\dfrac{(x_1-x_2)\left(-2x_0^3+3x_1x_0^2-3x_2^2x_0+2x_2^3\right)+(x_1-x_0)\left(2x_0^3-3x_1x_0^2+x_1^2(3x_2-2x_1)\right)}{(x_1-x_0)\left(x_0^2-2x_1x_0-x_1(x_1-2x_2)\right)+(x_1-x_2)\left(-x_0^2+2(x_1-x_2)x_0+x_2^2\right)} \\
b &= \dfrac{4x_2x_0^4+\left(2x_1^2-10x_2x_1-5x_2^2\right)x_0^3+\left(-5x_1^3+9x_2x_1^2+9x_2^2x_1+2x_2^3\right)x_0^2+x_1\left(4x_1^3-10x_2x_1^2+9x_2^2x_1-10x_2^3\right)x_0}{x_0^3-(2x_1+x_2)x_0^2-\left(x_1^2-6x_2x_1+2x_2^2\right)x_0+x_1^3+x_2^3-x_1x_2^2-2x_1^2x_2} \\
&\quad +\dfrac{x_1x_2^2\left(2x_1^2-5x_2x_1+4x_2^2\right)}{x_0^3-(2x_1+x_2)x_0^2-\left(x_1^2-6x_2x_1+2x_2^2\right)x_0+x_1^3+x_2^3-x_1x_2^2-2x_1^2x_2} \\
c &= \dfrac{-2\left(x_1^2-2x_2x_1+2x_2^2\right)x_0^4+x_1x_2\left(4x_1^3-9x_2x_1^2+6x_2^2x_1+4x_2^3\right)x_0+x_1^2x_2^2\left(-2x_1^2+5x_2x_1-4x_2^2\right)}{x_0^3-(2x_1+x_2)x_0^2-\left(x_1^2-6x_2x_1+2x_2^2\right)x_0+x_1^3+x_2^3-x_1x_2^2-2x_1^2x_2} \\
&\quad +\dfrac{x_0^3\left(5x_1^3-9x_2x_1^2+6x_2^2x_1+5x_2^3\right)-x_0^2\left(4x_1^4-6x_2x_1^3+9x_2^3x_1+2x_2^4\right)}{x_0^3-(2x_1+x_2)x_0^2-\left(x_1^2-6x_2x_1+2x_2^2\right)x_0+x_1^3+x_2^3-x_1x_2^2-2x_1^2x_2}
\end{cases}
$$

となる.

具体的な関数

周期 3 の関数には 2 種類考えられる. それは x_0, x_1, x_2 の大小による区別である. まず, x_0 を最小のものとして固定する. すると $x_0 < x_1 < x_2$, $x_0 < x_2 < x_1$ と分けられる. 前者を反時計回りの関数, 後者を時計回りの関数と呼ぶことにする.

反時計回りの関数

$x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$ とすると, $a = -15, b = 59, c = -77$ となるので, 関数は以下のようになる.

$$f(x) = x^3 - 15x^2 + 59x - 77$$

なので,

$$f'(x) = 3x^2 - 30x + 59x$$

であるから,

$$g(x) = x - \frac{x^3 - 15x^2 + 59x - 77}{3x^2 - 30x + 59}$$

となり, $g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 1$ が成り立つので, 周期 3 でループすることが確認できる.

時計回りの関数

$x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 2$ とすると, $a = 3, b = -13, c = 17$ となるので, 関数は以下のようになる.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 13x + 17$$

なので,

$$f(x) = 3x^2 + 6x^2 - 13$$

であるから,

$$g(x) = x - \frac{x^3 + 3x^2 - 13x + 17}{3x^2 + 6x - 13}$$

となる. $g(1) = 3, g(3) = 2, g(2) = 1$ が成り立つので, 周期 3 でループすることが確認できる.

周期 4 の 5 次関数

周期 3 と同様に考えるが, 周期 4 のループになるような 4 次関数は見つけることができなかったので, 5 次関数から見つけることとする. 周期 3 と同様に簡単にするために, x^5, x^4 の係数が 1 である関数に限定する. つまり $f(x) = x^5 + x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ に限定して考えるものとする. まず, 周期 4 で回る 4 点を x_0, x_1, x_2, x_3 として連立方程式を立て, a, b, c, d について解く. a, b, c, d は x_0, x_1, x_2, x_3 を変数とする関数として表される. そこで x_0, x_1, x_2, x_3 に適当な値を代入し, 周期 4 となる $f(x)$ を求めることとする.

周期 4 の 5 次関数

$$f(x) = x^5 + x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

なので,

$$f(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

であるから,

$$g(x) = x - \frac{x^5 + x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d}{5x^4 + 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c}$$

周期 4 のために, 以下の連立方程式が成り立つ.

$$\begin{cases} g(x_0) & = x_1 \\ g(x_1) & = x_2 \\ g(x_2) & = x_3 \\ g(x_3) & = x_4 \end{cases}$$

つまり,

$$\begin{cases} x_0 - \frac{x_0^5+x_0^4+ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d}{5x_0^4+4x_0^3+3ax_0^2+2bx_0+c} & = x_1 \\ x_1 - \frac{x_1^5+x_1^4+ax_1^3+bx_1^2+cx_1+d}{5x_1^4+4x_1^3+3ax_1^2+2bx_1+c} & = x_2 \\ x_2 - \frac{x_2^5+x_2^4+ax_2^3+bx_2^2+cx_2+d}{5x_2^4+4x_2^3+3ax_2^2+2bx_2+c} & = x_3 \\ x_3 - \frac{x_3^5+x_3^4+ax_3^3+bx_3^2+cx_3+d}{5x_3^4+4x_3^3+3ax_3^2+2bx_3+c} & = x_0 \end{cases}$$

となる. これらを解くと,

これらを解くと,

周期 4 の 5 次関数

x_0, x_1, x_2, x_3 に値を代入することで, 周期 4 でループする 5 次関数を求めることができる. ここで周期 3 の場合と同様に, ループの仕方にもいくつかの分け方が考えられる. x_0, x_1, x_2, x_3 の大小による区別である. まず, x_0 を最小のものとして固定する. すると

$$\begin{cases} x_0 < x_1 < x_2 < x_3 & (1) \\ x_0 < x_1 < x_2 < x_3 & (2) \\ x_0 < x_1 < x_3 < x_2 & (3) \\ x_0 < x_3 < x_1 < x_2 & (4) \\ x_0 < x_2 < x_3 < x_1 & (5) \\ x_0 < x_3 < x_2 < x_1 & (6) \end{cases}$$

周期 4 の 5 次関数

6 種類に分けられる. (1), (2), (3) と (6), (5), (4) はそれぞれ時計回り, 反時計回りの関係にある. (2), (3), (4), (5) となるような値を見つけることができなかったので, 以下では (1), (6) の二つの場合の具体例を示す.

C $x_0 = 30, x_1 = 29, x_2 = 27, x_3 = 26$ とすると,
$a = -7721, b = 424155, c = -8753160, d = 64219740$ となるので, 関数は以下のようになる.

$$f(x) = x^5 + x^4 - 7721x^3 + 424155x^2 - 8753160x + 64219740$$

なので,

$$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 23163x^2 + 848310x - 8753160$$

であるから,

$$g(x) = x - \frac{x^5 + x^4 - 7721x^3 + 424155x^2 - 8753160x + 64219740}{5x^4 + 4x^3 - 23163x^2 + 848310x - 8753160}$$

となる. $g(30) = 29, g(29) = 27, g(27) = 26, g(26) = 30$ が成り立つので, 周期 4 でループすることが確認できる.

周期 4 の 5 次関数

$x_0 = 30, x_1 = 29, x_2 = 27, x_3 = 26$ とすると,
$a = -7721, b = 424155, c = -8753160, d = 64219740$ となるので, 関数は以下のようになる.

$$f(x) = x^5 + x^4 - 7721x^3 + 424155x^2 - 8753160x + 64219740$$

なので,

$$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 23163x^2 + 848310x - 8753160$$

であるから,

$$g(x) = x - \frac{x^5 + x^4 - 7721x^3 + 424155x^2 - 8753160x + 64219740}{5x^4 + 4x^3 - 23163x^2 + 848310x - 8753160}$$

となる. $g(30) = 29, g(29) = 27, g(27) = 26, g(26) = 30$ が成り立つので, 周期 4 でループすることが確認できる.

今後の課題

今回は周期 3 でループする関数を具体的に探すのみにとどまったが, それがどういった一般性を持つものなのかといった点にまで進めることができれば考えている. また研究途中で周期 2 を持つ 2 次関数と周期 4 を持つ 4 次関数を探したが見つけることができなかった, なので, 周期 $2n$ を持つ $2n$ 次関数は存在しないのではないかという仮説も浮かんだ. また, 周期 4 の点のとり方は, 2 種類しか見つけることができなかった. もしかしたら, ループの仕方というのにも特徴があるのかもしれない. こういった幾つのかの疑問点に答えられるよう, 研究を続けていきたい.