特殊相対性理論と Maxwell 方程式

豊嶋 祐人

芝浦工業大学 数理科学研究会

2019/05/19

動機

古典電磁気学からの帰結として, 純粋に特殊相対性理論に興味があったのでテーマとした. 芝浦祭では一般相対性理論について話そうと思っているから, その準備も兼ねて発表しようと思う.

目次

1. 特殊相対性理論の出来
2. **4** 元電流密度
3. **Lorentz** 変換
4. **Minkowski** 空間
5. **Maxwell** 方程式のポテンシャル表現
6. **(**電磁場テンソル**)**

電磁波の媒質として当時考えられていたエーテルを検出するための **Michelson-Morley** の実験は失敗に終わったが, エーテル説を擁護しつつこの実験結果を説明するために **Lorentz** は以下の仮説を提唱した.

Lorentz 収縮

エーテル中を速度 v で運動する物体はその長さが $\sqrt{1-(v/c)^2}$ 倍に収縮する.

実際, **Lorentz** 収縮を認めれば **Michelson-Morley** の実験結果を説明づけることはできるが, (人々が納得するような) この収縮の説明はまだ当時は存在しなかった.

ここで **Lorentz** は運動方程式が **Galilei** 変換に対して共変であるのに対し, **Maxwell** 方程式が **Galilei** 変換に対して共変でないことに気づく. 物体が荷電粒子の集まりであることを考えればこれは矛盾であるから, **Lorentz** は **Maxwell** 方程式を共変に保つような慣性系間の座標変換として以下の **Lorentz** 変換を提唱した.[1]

Lorentz 変換

K 系における事象 (x^0, x^1, x^2, x^3) は K' 系 (K 系に対して x^1 方向に速度 V で移動する慣性系) からは以下のように見える.

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0), \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3$$

$$(\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta \equiv V/c)$$

[1] ちなみに慣性系間でこれらと同様に変換される 4 組の物理量を 4 元ベクトル (4-vector) と呼び, x^i $(i = 0, 1, 2, 3)$ を 4 元座標と呼ぶ.

さらに **Einstein** は **Lorentz** 変換は以下の要請から導かれるとし, これらの要請をもとに特殊相対性理論を構築した.

特殊相対性理論の基本要請

・相対性原理 $\cdots$ すべての慣性系において物理法則は同じ形で書かれる.
・光速不変の原理 $\cdots$ すべての慣性系において光速は不変である.

4 元電流密度

点電荷 q の電荷密度と電流密度はデルタ関数を用いて表される.

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = q\delta(x - v_x t)\delta(y - v_y t)\delta(z - v_z t), \quad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{v}\rho(\boldsymbol{r},t)$$

まず, 慣性系間の変換について以下が成り立つ.

$$x - v_x t = \gamma\left((x' + Vt') - v_x\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right)\right) = \gamma\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)(x' - v'_x t')$$

同様に y と z についても計算すれば以下を得る.[2]

$$\delta(x - v_x t) = \frac{1}{\gamma\left(1 - Vv_x/c^2\right)}\delta(x' - v'_x t'),$$
$$\delta(y - v_y t) = \delta(y' - v'_y t'), \quad \delta(z - v_z t) = \delta(z' - v'_z t')$$

[2] デルタ関数の性質 $\delta(\alpha x) = \delta(x)/\alpha$ $(\alpha \in \boldsymbol{R})$ を既知とした.

よって電荷密度の変換則 $\rho' = \gamma(1 - Vv_x/c^2)\rho$ が得られるから，$j^0 \equiv c\rho$ とすれば以下を得る．

$$j'^0 = \gamma(j^0 - \beta j^1),\quad j'^1 = \gamma(j^1 - \beta j^0),\quad j'^2 = j^2,\quad j'^3 = j^3$$

これらは 4 元ベクトルであるから 4 元電流密度 **(4-current)** と呼ばれる．

Lorentz 変換

狭義の **Lorentz** 変換では $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$ が常に成り立つから, $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$ が保たれるような座標変換を広義の **Lorentz** 変換とする.[3]
よって通常の空間回転も **Lorentz** 変換であるから, 任意の方向への **Lorentz** 変換を考えることができる.

[3]このことは特殊相対性理論の基本要請と矛盾しない.

Minkowski 空間

反変ベクトルどうしの内積 **(inner product)** を
$< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} > \equiv u^0 v^0 - u^1 v^1 - u^2 v^2 - u^3 v^3$ で定めれば, 計量テンソルは以下のように表される.

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

このような内積空間を **Minkowski** 空間と呼び, 広義の **Lorentz** 変換は $x^\mu x_\mu = \mathrm{const.}$ を満たす線形変換として捉えられる. [4]

[4] x_μ は x^μ の共変成分である. すなわち, $x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu$.

場とポテンシャルの関係式は(磁場に関する)**Gauss** の法則と電磁誘導則に由来した. ここで残りの **Maxwell** 方程式をポテンシャルを用いて書き換えるのだが, まず以下の条件を課す.[5]

$$\textbf{Lorentz 条件 (Lorentz condition)} : \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{A} = 0$$

これを用いれば **Maxwell** 方程式は以下の **3** つで書かれる.[6]

$$\Box\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \mu_0 \boldsymbol{j} = \Box\boldsymbol{A}, \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{A} = 0$$

[5] この条件は古典電磁気学と無矛盾である.

[6] $\Box \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$

ここで, 反変ベクトルによる偏微分は **Lorentz** 変換と対称的に変換されるから共変ベクトルの性質をもち, これを ∂_μ と表記する.

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \overline{\Lambda}^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

同様に共変ベクトルによる偏微分は反変ベクトルの性質をもつから, これを ∂^μ と表記する.

ここで **4 元ポテンシャル (4-potential)** $A^\mu \equiv (\phi/c, \boldsymbol{A})$ を導入すれば, **Maxwell** 方程式は以下の形で書かれる.[7]

Maxwell 方程式の電磁ポテンシャルによる表現

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu = \mu_0 j^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3), \qquad \partial_\mu A^\mu = 0$$

[7] Maxwell 方程式の Lorentz 共変性より, 4 元ポテンシャルは反変ベクトルである.

2 階の交代反変テンソル $f^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ は以下のように **4** 元ポテンシャルと電磁場の関係を表すテンソルであるから, 電磁場テンソル **(electromagnetic field tensor)** と呼ばれる.

$$(f^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

実際, 各成分は以下のように計算される.

$$f^{0k} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^k + \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\phi}{c} = \frac{1}{c}\left(\mathrm{grad}\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)_k = -\frac{1}{c}E^k \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$f^{kl} = \partial_l A^k - \partial_k A^l = \epsilon_{mlk} B^m \quad (k, l = 1, 2, 3,\ k \neq l)$$

(狭義の)Lorentz 変換に伴って電磁場テンソルは $(f'^{\rho\sigma}) = (\Lambda^{\rho}_{\mu})(f^{\mu\nu})^{t}(\Lambda^{\sigma}_{\nu})$ のように変換されるから $(f'^{\rho\sigma})$ は以下のように表される.

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -\gamma(E_y/c-\beta B_z) & -\gamma(E_z/c+\beta B_y) \\ E_x/c & 0 & -\gamma(B_z-\beta E_y/c) & \gamma(B_y+\beta E_z/c) \\ \gamma(E_y/c-\beta B_z) & \gamma(B_z-\beta E_y/c) & 0 & -B_x \\ \gamma(E_z/c+\beta B_y) & -\gamma(B_y+\beta E_z/c) & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

よって, 同一の事象における慣性系間の電磁場の関係式を得る.

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - VB_z), \quad E'_z = \gamma(E_z + VB_y)$$
$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B_y + V/c^2 E_z), \quad B'_z = \gamma(B_z - V/c^2 E_y)$$

今後の課題

特殊相対性理論についてはその出来から発展的な話題まで考えることができたから, これから一般相対性理論について触れてみたいと思う.

参考文献

- 江沢 洋, 相対性理論, 裳華房, 2008.
- 田代 嘉宏, テンソル解析, 裳華房, 2006.