幾何学的代数

～代数幾何に向けて～

bv18025　加藤 諒

令和元年 11 月 1 日

目次

1　研究背景

現代社会を生きていくからには，現代数学を学ぶべきである．そんな中，ある先生から代数幾何の勉強をすることを勧めていただき，今回のテーマとすることにした．本発表では，“代数幾何”の入門書の中でも図書館で見つけて惹かれた数学書 [1] の内容を紹介する．この本では，“代数幾何”の題材として様々な代数系とその代数系における演算の幾何的な解釈が説明されており，抽象的で解釈の難しい代数学と幾何学のつながりや違いを学ぶことができると考えた．

2　代数系とはなにか

今回，さまざまな代数系を紹介するのでまずは代数系の定義を確認する．

定義 2.1 (代数系 (algebra))**.** ベクトル空間に結合則を満たす積が定義され，積に関して閉じているとき，すなわち任意の元の積がそのベクトル空間に属しているとき，その空間は代数系であるという．

次章以降でこの具体例を挙げていく．

3　ハミルトンの四元数代数

ハミルトン代数系とは，四元数を導入し，四元数積とよぶ新しい演算を用いる体系である．

3.1　四元数の導入

定義 3.1 (四元数 (qusternion))**.** 四つの実数 q_0, q_1, q_2, q_3 を，記号 i, j, l を用いて

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

と表したものを四元数という．また，四元数全体は以下の法則を満たすとする．

(1) 交換則 $a + b = b + a$
(2) 結合則 $(a + b) + c = a + (b + c)$
(3) 分配則 $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$, $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$

したがって，上述の q と異なる四元数を

$$q' = q'_0 + q'_1 i + q'_2 j + q'_3 k$$

とすると，例えば $2q + 3q'$ は次のようになる．

$$2q + 3q' = (2q_0 + 3q'_0) + (2q_1 + 3q'_1)i + (2q_2 + 3q'_2)j + (2q_3 + 3q'_3)k$$

このように表されることを四元数全体が基底 $\{1, i, j, k\}$ の生成する 4 次元ベクトル空間であるという．

注意. 和“ + ”は集合を表しているに過ぎず，実数と虚数を足して別の何かになるわけではない．このような和を形式和という．

さらに i, j, k 間の積を考え，形式和を交換則，結合則，分配則によって展開すれば，積は最終的には記号 i, j, k の間に帰着する．そこで次のように定義する．

$$i^2 = -1 \ , \ j^2 = -1 \ , \ k^2 = -1 \tag{1}$$
$$jk = i \ , \ ki = j \ , \ ij = k \ , \ kj = -i \ , \ ik = -j \ , \ ji = -k \tag{2}$$

(1) は i, j, k それぞれが虚数単位になっていることを意味している．(2) は $\{i, j, k\}$ を正規直交基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ とみなせば，ベクトル積 (クロス積) と同じ規則に従うことを示している．また，(2) から分かるように四元数の積は可換でない．

3.2　四元数積

式 (1), (2) から，上述の 2 つの四元数 $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ と $q' = q'_0 + q'_1 i + q'_2 j + q'_3 k$ の積 (四元数積) は次のようになる．[*1]

$$\begin{aligned} qq' =&(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)(q'_0 + q'_1 i + q'_2 j + q'_3 k) \\ =&(q_0 q'_0 - q_1 q'_1 - q_2 q'_2 - q_3 q'_3) + (q_0 q'_1 + q_1 q'_0 + q_2 q'_3 - q_3 q'_2) i \\ &+ (q_0 q'_2 + q_2 q'_0 + q_3 q'_1 - q_1 q'_3) j + (q_0 q'_3 + q_3 q'_0 + q_1 q'_2 - q_2 q'_1) k \end{aligned} \tag{$\star$}$$

式 $(\star)$ は四元数が積で閉じていることを表している．また，式 $(\star)$ と同様に計算すれば

$$(qq')q'' = q(q'q'')$$

が分かる．以上と定義 2.1 から，四元数全体は代数系である．また，四元数 $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ について次がいえる．

1. $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ のとき $q = q_0$ であり， $q_0 \in \mathbb{R}$ より，四元数は実数の拡張である．
2. $q_0 = 0$ のとき $q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ であり，これをベクトル $q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_2 e_2$ とみなせば，四元数は 3 次元ベクトルの拡張である．

これらから，四元数 q の q_0 を四元数 q のスカラー部分，$q_1 i + q_2 j + q_3 k$ を四元数 q のベクトル部分とよぶ．q のスカラー部分を α，ベクトル部分を $\boldsymbol{a}$，同様に q' のスカラー部分を β，ベクトル部分を $\boldsymbol{b}$ とすると q, q' はそれぞれ次のように表せる．

$$q = \alpha + \boldsymbol{a} \ , \ q' = \beta + \boldsymbol{b}$$

これを用いると式 $(\star)$ は次のように言い換えることができる．[*2]

$$qq' = (\alpha + \boldsymbol{a})(\beta + \boldsymbol{b}) = (\alpha\beta - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) + \alpha \boldsymbol{b} + \beta \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \tag{3}$$

ただし，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ と $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\{i, j, k\}$ を正規直交基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ とみなして計算している．上の式より，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を四元数とみなした積 $\boldsymbol{ab}$ が内積とベクトル積を同時に計算していることが分かる．

[*1] 積 $(\times)$ をとり，式 (1), (2) を用いて整理する．
[*2] q, q' と内積, ベクトル積の定義から展開し，整理すると確かに式 $(\star)$ の右辺と一致することが確かめられる．

3.3　共役四元数

定義 3.2. q の逆元 $q^\dagger$ を次のように定義する．

$$q^\dagger = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$$

定義から明らかなように，共役四元数の共役四元数はもとの四元数である．ここで，qq' の共役四元数は式 (3) と定義 3.2 からスカラー部分，ベクトル部分に気をつければ

$$(qq')^\dagger = (\alpha\beta - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) - \alpha\boldsymbol{b} - \beta\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \tag{4}$$

となる．また，同様に考えると $q = \alpha - \boldsymbol{a}$, $q' = \beta - \boldsymbol{b}$ であるから

$$q'^\dagger q^\dagger = (\alpha\beta - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) - \alpha\boldsymbol{b} - \beta\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \tag{5}$$

以上，式 (4),(5) から次が分かる．

$$q^{\dagger\dagger} = q \ , \ (qq')^\dagger = q'^\dagger q^\dagger$$

また，共役四元数の定義から次も明らか．

$$\begin{aligned} &\text{四元数 } q \text{がスカラーである条件 } q^\dagger = q \\ &\text{四元数 } q \text{がベクトルである条件 } q^\dagger = -q \end{aligned} \tag{$\spadesuit$}$$

3.4　四元数のノルム

四元数 q とその共役四元数 $q^\dagger$ の積を考えると

$$qq^\dagger = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \ (= q^\dagger q) \tag{6}$$

となる．そこで，四元数 q のノルムを次のように定義する．

$$||q|| = \sqrt{qq^\dagger} = \sqrt{q^\dagger q} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \tag{7}$$

このとき，ベクトル $\boldsymbol{a}$ はそれを四元数とみなしたとき，四元数としてのノルムとベクトルとしてのノルムは一致する．さらに，$q \neq 0$ であれば $||q|| > 0$ であるから，式 (7) から次が分かる．

$$q\left(\frac{q^\dagger}{||q||^2}\right) = \left(\frac{q^\dagger}{||q||^2}\right) = 1 \ \Leftrightarrow \ q^{-1} = \frac{q^\dagger}{||q||^2}$$

ただし，q^{-1} は q の逆元を表す．逆元が存在し，割り算ができるということは $qq' = qq'' \Rightarrow q' = q''$ を表す．これは内積やベクトル積では成り立たない．なぜなら $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle$ であっても $\boldsymbol{a}$ に直交する任意のベクトル $\boldsymbol{b}$ を加えても成り立ち，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ であっても $\boldsymbol{a}$ に平行する任意のベクトル $\boldsymbol{b}$ を加えても成り立つからである．

3.5　四元数による回転の表示

単位四元数 q と，四元数とみなしたベクトル $\boldsymbol{a}$ の四元数積 $\boldsymbol{a'} = q\boldsymbol{a}q^\dagger$ を考える．式 (6) から次がわかる．

$$\left(q\boldsymbol{a}q^\dagger\right)^\dagger = -q\boldsymbol{a}q^\dagger$$

これと ♠ から，$q\boldsymbol{a}q^\dagger$ はベクトルである．これを $\boldsymbol{a'}$ と書くと，計算規則から 2 乗ノルムは次の通り．

$$||\boldsymbol{a'}||^2 = ||\boldsymbol{a}||^2$$

また，q が単位四元数であることから ${q_0}^2 + {q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2 = 1$ である．よって，

$$q_0 = \cos\Omega \ , \ \sqrt{{q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2} = \sin\Omega$$

なる角度 Ω が存在し，スカラー部分とベクトル部分に分けて書くと

$$q_0 = \cos\frac{\Omega}{2} \ , \ q = \cos\frac{\Omega}{2} + \boldsymbol{l}\sin\frac{\Omega}{2}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{l}$ は単位ベクトルである．また，計算規則と式変形から以下を得る．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a'} &= q\boldsymbol{a}q^\dagger \\ &= \boldsymbol{a}\cos\Omega + \boldsymbol{l}\times\boldsymbol{a}\sin\Omega + \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{l}\rangle\,\boldsymbol{l}(1-\cos\Omega)\end{aligned}$$

これから， 四元数 q が，回転軸 $\boldsymbol{l}$ の周りの回転角 Ω の回転を表していることがわかる．q の作用を，回転軸 $\boldsymbol{l}$ の周りの回転角 Ω の回転子であるという．さらに，$-q$ について，

$$-q = -\cos\frac{\Omega}{2} - \boldsymbol{l}\sin\frac{\Omega}{2} = \cos\frac{2\pi-\Omega}{2} - \boldsymbol{l}\sin\frac{2\pi-\Omega}{2}$$

であるから，これは $-\boldsymbol{l}$ の周りの角度 $2\pi-\Omega$ の回転を表している．これは，$\boldsymbol{l}$ の周りの角度 Ω の回転と同じである．

4　グラスマンの外積代数

グラスマン代数系とは，縮約とよぶ新しい演算を用いる体系である．

4.1　部分空間と外積

部分空間とは，ベクトル空間の部分集合であって，それ自身が閉じたベクトル空間になっているもののことをいう．例えば，3 次元空間には 0 次元，1 次元，2 次元，3 次元空間の部分空間が存在する．また，部分空間を外積を用いて書く．例えば，同一直線上にないベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は平面を張り，この平面を $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ と書く．

注意． 以下で空間の大きさ 0 は“存在しない”と解釈する．

4.2　外積代数

外積の性質を公理としてまとめ，ベクトルを基底によって表した場合の表し方を考える．部分空間は向きと大きさをもち，同じ次元どうしの和やスカラー倍が定義される．先に述べたように直線 $\boldsymbol{a}$ と直線 $\boldsymbol{b}$ の張る 2 次元部分空間は $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ である．同様に直線 $\boldsymbol{a}$ と平面 $\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$ の張る 3 次元部分空間は $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$ であり，これは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の張る空間，さらに平面 $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ と直線 $\boldsymbol{c}$ の張る空間 $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c}$ とも等しい．すなわち，外積 $\wedge$ は結合則を満たす．数式で表せば次のようになる．

$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$$

また，スカラー に関する外積について次のように定義する．

定義 4.1. スカラー α とベクトル $\boldsymbol{a}$ の外積について次のように定義する．

$$\alpha \wedge \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \wedge \alpha = \alpha \boldsymbol{a}$$

スカラー α と β の外積について次のように定義する．

$$\alpha \wedge \beta = \alpha\beta$$

さらに，3 次元空間の部分空間は 3 次元までしか存在しないので，$k > 3$ の k 重ベクトルは存在しない．つまり，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d} = 0\ ,\ \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d} \wedge \boldsymbol{e} = 0\ ,\ \ldots$$

以上から外積の公理をまとめると，次のようになる．

公理 4.1 (外積の公理)**.** 次が成り立つ．

(1) 反対称性 $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}$
(2) 分配則および線形性 $\boldsymbol{a} \wedge (\alpha\boldsymbol{b} + \beta\boldsymbol{c}) = \alpha\boldsymbol{a} \wedge \beta\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c}$
(3) 結合則 $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$
(4) スカラー演算 $\alpha \wedge \beta = \alpha\beta\ ,\ \alpha \wedge \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \wedge \alpha = \alpha\boldsymbol{a}$

次に，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ をそれぞれ $\boldsymbol{a} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, $\boldsymbol{b} = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$ とし，$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ を上の公理にしたがって計算すれば次のようになる．

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_2 \wedge e_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_3 \wedge e_1 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_1 \wedge e_2$$

同様に，

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = (a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

が成り立つ．

4.3　縮約

定義 4.2 (縮約 (contraction))**.** k 次元部分空間をより次元の低い部分空間に縮小する操作を縮約という．具体的には，k 次元部分空間を定義する k 重ベクトルに対して，別の j 重ベクトル $(j \leq k)$ を作用させて $(k - j)$ 次元空間に縮小する．

いま，例えば直線 $\boldsymbol{a}$ をベクトル $\boldsymbol{x}$ によって縮約したスカラーを $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}$ を考える．これを $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}$ と書き，その値をベクトルの内積によって定義する．これは幾何学的には $\boldsymbol{x}$ を法線とする平面と直線 $\boldsymbol{a}$ の交点を計算している，と解釈できる．また，スカラー に関する縮約について次のように定義する．

定義 4.3. スカラー α とスカラー β，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の縮約について次のように定義する．

$$\alpha\cdot\beta=\alpha\beta\ ,\ \alpha\cdot\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}\ ,\ \alpha\cdot\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=\alpha\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\ ,\ \alpha\cdot\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}=\alpha\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}$$

さらに，0 より小さい次元の部分空間は存在しないので，スカラーをスカラー以外で縮約しても 0(存在しない) と約束する．

以上，外積の公理や外積，縮約 (内積) の計算規則，スカラーの縮約の定義などから縮約の計算の結果をまとめると次のようになる．

命題. 部分空間の k 重ベクトル $(k=0,1,2,3)$ による縮約は，次のようになる．

1. スカラー α による縮約:$\alpha\cdot\beta=\alpha\beta$, $\alpha\cdot\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}$, $\alpha\cdot\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=\alpha\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$, $\alpha\cdot\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}=\alpha\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}$
2. ベクトル $\boldsymbol{x}$ による縮約:$\boldsymbol{x}\cdot\alpha=0$, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}\left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}\right\rangle$, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=\left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}\right\rangle\boldsymbol{b}-\left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}\right\rangle\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}=\left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}\right\rangle\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}+\left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}\right\rangle\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{a}$, $\left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}\right\rangle\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$
3. 2 重ベクトル $\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}$ による縮約: $\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}\cdot\alpha=0$, $\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{a}=0$, $\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=\left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{a}\right\rangle-\left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{b}\right\rangle$, $\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}=(\left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{b}\right\rangle-\left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}\right\rangle)\boldsymbol{a}+(\left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}\right\rangle-\left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{a}\right\rangle)\boldsymbol{b}+(\left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{a}\right\rangle-\left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{b}\right\rangle)\boldsymbol{c}$
4. 3 重ベクトル $\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z}$ による縮約 : $\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z}\cdot\alpha=0$, $\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{a}=0$, $\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=0$, $\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}=\left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{z},\boldsymbol{b}\right\rangle+\left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{a}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{z},\boldsymbol{c}\right\rangle+\left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{b}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{z},\boldsymbol{a}\right\rangle-\left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{b}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{z},\boldsymbol{c}\right\rangle-\left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{z},\boldsymbol{a}\right\rangle-\left\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{a}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{z},\boldsymbol{b}\right\rangle$

ここまでの結果から次が分かる．

4.4 縮約の幾何学的な意味

内積をとるなどの計算規則に従って縮約を考えると，部分空間を k 重ベクトルによって縮約した空間は，もとの部分空間に含まれ，次元が k だけ低下した部分空間であり，その k 重ベクトルの表す部分空間に直交する．k 次元部分空間 $(k=0,1,2,3)$ に直交する $(3-k)$ 次元部分空間を直交補空間といい，k 重ベクトルの表す部分空間の直交補空間の交わりを計算していると解釈できる．とくに，その空間が k 重ベクトルの表す部分空間に直交していれば，縮約すると 0 になる．数式で表せば次のようになる．

$$(\cdots)\cdot(\cdots)=0\Leftrightarrow(\cdots)\perp(\cdots)$$

注意. 内積は，縮約の特別な場合 (両方が直線のとき) とみなせる．

5 幾何学積とクリフォード代数

クリフォード代数とは四元数代数とグラスマン代数を結合したもので，幾何学積とよぶ新しい演算を用いる体系である．

5.1　幾何学積

ここでは，新たな演算である幾何学積を導入する．

定義 5.1 (幾何学積 (geometric product))**.** 幾何学積の計算規則を次のように定義する．

$$
{e_1}^2 = {e_2}^2 = {e_3}^2 = 1
$$
$$
e_2e_3 = -e_3e_2\ ,\ e_3e_1 = -\ e_1e_3\ ,\ e_1e_2 = -e_2e_1
$$

5.2　クリフォード代数系

クリフォード代数系を

定義 5.2 (クリフォード代数系 (Clifford algebra))**.** クリフォード代数系は，グラスマン代数系と同様に 1 と e_1, e_2, e_3 の生成する代数系であり，それらの間の積 *(*幾何学積*)* は結合則を満たし，上の規則に従うものとする．クリフォード代数系は，加減算とスカラー倍に関して 8 次元ベクトル空間となる．

6　クリフォード代数系とその他の代数系のつながり

6.1　ハミルトン代数系とクリフォード代数系の関係性

ハミルトン系とクリフォード代数系の関係性を考察する．

定義 6.1 (グレード (grade))**.** 基底に含まれる記号の積の項数をグレードとよぶ．すなわち，スカラー部分，ベクトル部分，二重ベクトル部分，三重ベクトル部分のグレードはそれぞれ $0, 1, 2, 3$ である．

定義 6.2 (偶多重ベクトル (even multivector))**.** 偶数のグレードの基底のみからなる

$$
\mathcal{A} = \alpha + a_1e_2e_3 + a_2e_3e_1 + a_3e_1e_2
$$

の形を偶多重ベクトルとよぶ．

上の計算規則の定義などから，偶多重ベクトルのスカラー倍は偶多重ベクトルであり，偶多重ベクトルどうしの和も積も偶多重ベクトルである．このことは，偶多重ベクトルはそれ自身で閉じた代数系，すなわち部分代数系を作っていることを意味する．この部分代数系はハミルトン代数系に他ならない．つまり，ハミルトン代数系はクリフォード代数系の一部である．

命題 (幾何学積の縮約と外積による表現)**.** ベクトル $\boldsymbol{a}$ と k 重ベクトル $(\cdots)$　$(k = 1, 2, 3)$ との幾何学積は，次のように縮約と外積との和で表せる．

$$
\boldsymbol{a}(\cdots) = \boldsymbol{a}\cdot(\cdots) + \boldsymbol{a}\wedge(\cdots)
$$

これを適応すれば，すべての幾何学積を縮約と内積で表すことができる．

6.2 グラスマン代数系とクリフォード代数系の関係性

グラスマン代数系とクリフォード代数系の関係性を考察する．まず，3 次元空間のベクトル $\boldsymbol{a} = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ をクリフォード代数系の元と同一視する．そして，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して次の定義をする．

定義 6.3. ベクトルの積についていくつかの計算規則を定義する．

1. $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{ab} - \boldsymbol{ba})$
2. $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \dfrac{1}{6}(\boldsymbol{abc} + \boldsymbol{bca} + \boldsymbol{cab} - \boldsymbol{cba} - \boldsymbol{bac} - \boldsymbol{acb})$

1. より $\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a} = 0$ が満たされる．2. より， $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{b}$ が満たされる．最後に，4 個以上のベクトル積 $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d} \wedge \cdots$ は 0 であるからこのように定義した演算 $\wedge$ グラスマン代数系の外積と同じ計算規則を満たすので，グラスマン代数系と同一視できる．これは，すなわち，グラスマン代数系もまたクリフォード代数系の一部であることを意味している．外積と幾何学積が異なるのは，同じ記号どうしの外積が 0 になるのに対して，同じ記号どうしの幾何学積が 1 になることのみである．

6.3 幾何学積による回転の表示

ここでは鏡映による回転の表し方を紹介する．回転軸 $\boldsymbol{l}$ 周りの回転を考える．$\boldsymbol{l}$ の直行する二つのベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とすると，ベクトル $\boldsymbol{x}$ の回転は 2 回の鏡映の合成で与えられる．具体的には，まず，$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}$ に直行する平面に関して鏡映した位置を $\tilde{\boldsymbol{x}}$ とする．次に，$\tilde{\boldsymbol{x}}$ を $\boldsymbol{b}$ に直行する平面に関して鏡映した位置を $\boldsymbol{x'}$ とする．この鏡映操作によってノルムは変化しないし，$\boldsymbol{l}$ 自身は変化しないから，$\boldsymbol{x'}$ は $\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{l}$ の周りの回転である．計算規則などから $\tilde{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{axa}^{-1}$ であるから，$\boldsymbol{x'}$ は次のように表せる．

$$\boldsymbol{x'} = -\boldsymbol{b}\tilde{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{b}^{-1} = -\boldsymbol{b}(-\boldsymbol{axa}^{-1})\boldsymbol{b}^{-1} = (\boldsymbol{ba})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{ba})^{-1}$$

これは $\mathcal{R} = \boldsymbol{ba}$ とおけば，次のように書ける．

$$\boldsymbol{x'} = \mathcal{R}\boldsymbol{x}\mathcal{R}^{-1}$$

このように作用する $\mathcal{R}$ を回転子とよぶ．

7 今後の課題

今回は代数幾何の入門としてベクトルなど慣れ親しんだものを扱ったが今後は多項式環などにも食わず嫌いせずに触れていきたい．ちなみに後で知ったのだがここまでの内容は “幾何学的代数” というものらしく結局のところ元々学ぼうとしていた“代数幾何”がなんなのかはいまだに分かっていない．

参考文献

[1] 金谷健一, 幾何学と代数系, 森北出版株式会社,2014.