$1 + 1 = ?$

bv18077　森田 泰成

令和元年 11 月 3 日

目次

研究背景

数学に興味を持ち始めた高校生の頃に $1+1=2$ となることを証明するにはノート 1 冊かかるという記事をどこかで見かけた. その当時は何をどのように証明すればよいのかすらわからなかった. なのである程度知識を身に着けた今, 再度証明の概要でもつかめればと思った.

1　はじめに

アルファベットの「a」,「b」を事物 a, 単に a と呼ぶ. 1 つの事物 a と b が同じである. (b と合同である) また, b と a が同じである. というのは a についてすべて考えられることはすべて b についての考えられる. また b について成立するあらゆることが a についても考え得られるということである. a と b が同一の事物の記号, または名前に過ぎないことを, 記号 $a=b$ によりまた $b=a$ とも示す. そのうえ $b=c$ ならば, c は a のように記号 b で表された事物に対する記号であるから $a=c$ である. (同一の記号, 名前に過ぎないため, $a=b=c$)a によって表された事物と b によって表された上述としての一致が起こらないならば, これは一方のものには適合するが, もう一方には適合しないという何らかの性質があるということでもある.

定義 1.1　相異なる事物 $a, b, c, \cdots$ を何らかの理由から 1 つの共通な見地からとらえて, 頭の中で総括するということが起こる. このとき, これらの事物は「集合」S を作るという. 事物 $a, b, c, \cdots$ を集合 S の「要素」と呼び, これら S に「含まれ」, 逆に S はこれら要素から「構成される」という. このような集合 (または全体, 多様体, 総体) は自身の思考の対称として 1 つの事物である. これは 1 つ 1 つの事物が S の要素であるかないかが確定すれば, 余すところなく確定する. 従って集合 S が集合 T と同じであるというのは, 記号で $S=T$ と書くが, S の 1 つ 1 つの要素がまた T の要素であり, また T の 1 つ 1 つの要素が S の要素でもある. 表現の仕方を等しい形にするために, 集合 S がただ 1 つの要素 a からなるという特別の場合も許すと都合がよい. これは事物 a が S の要素であるが, a とは異なるどんな事物も S の要素でない場合である.

今回, 空集合については定義しないものとする.

定義 1.2　1 つの集合 A が 1 つの集合 S の「部分集合」であるとは, A の要素もまた S の要素になっていることである. 集合 A と集合 S の間にこの関係は, 以下にはいつでも繰り返し述べられていることから, このことを簡約のために記号「$A \subset S$」で表す. あらゆる A の要素が S の要素のうちに見いだされるとき, S は A の「全体集合」であるという時もある. 集合 S の 1 つ 1 つの要素 s は II によってそれ自身が集合であるから, これに対して記号「$s \subset S$」を適用することができる.

定理 1.1　III により $A \subset A$

定理 1.2　もし $A \subset B$ で $B \subset A$ ならば $A=B$ である.

証明 1.1　II, III より明らか

定義 1.3　もし, A が S の部分集合で S と相異なるとき, A を S の「真部分集合」であるという. 1.2 より, この場合 A は S の真部分集合ではない. 言い換えれば S のうちには A の要素でない要素が存

在する.

定理 1.3 もし $A \subset B$ で, $B \subset C$ ならば, 単に $A \subset B \subset C$ と書くこともできるが, その時, $A \subset C$ である. かつ, A が B の真部分集合または B が C の真部分集合ならば, A は C の真部分集合である.

証明 1.2 III, 1.3 より明らか.

定義 1.4 幾個かの集合 $A,\ B,\ C,\ \cdots$ を「合併した」集合 $\mathfrak{M}(A,\ B,\ C,\ \cdots)$ と表すが, この要素は次の規則で決定されるような集合を意味する. 1 つの事物はもしそれが集合 $A,\ B,\ C,\ \cdots$ のどれか 1 つの要素であるとき, すなわち, A「または」B「または」$C,\ \cdots$ の要素であるとき, その時に限ってこれは $\mathfrak{M}(A,\ B,\ C,\ \cdots)$ の要素である. 要素がただ 1 つしかない集合も許容する. そうすると明らかに $\mathfrak{M}(A) = A$ である. [*1]

定理 1.4 集合 $A,\ B,\ C,\ \cdots$ は $\mathfrak{M}(A,\ B,\ C,\ \cdots)$ の部分集合である.

証明 1.3 III, 1.4 より明らか

定理 1.5 $A,\ B,\ C,\ \cdots$ が 1 つの集合 S の部分集合ならば $\mathfrak{M}(A,\ B,\ C,\ \cdots) \subset S$

証明 1.4 III, 1.4 より明らか

定理 1.6 P が集合 $A,\ B,\ C,\ \cdots$ のうちの 1 つの集合の部分集合ならば $P \subset \mathfrak{M}(A,\ B,\ C,\ \cdots)$

証明 1.5 1.3, 1.4 より明らか

定理 1.7 集合 $P,\ Q,\ \cdots$ の 1 つ 1 つが集合 $A,\ B,\ C,\ \cdots$ の 1 つの部分集合ならば $\mathfrak{M}(P,\ Q,\ \cdots) \subset \mathfrak{M}(A,\ B,\ C,\ \cdots)$

証明 1.6 1.5, 1.6 より明らか

定理 1.8 集合 A が集合 $P,\ Q,\ \cdots$ のどれかを合併したものならば $A \subset \mathfrak{M}(P,\ Q,\ \cdots)$

証明 1.7 A のどの要素も 1.4 により集合 $P,\ Q,\ \cdots$ の 1 つの集合の要素である. 従って 1.4 より $\mathfrak{M}(P,\ Q,\ \cdots)$ の要素である. よって III より証明完了.

定理 1.9 集合 $A,\ B,\ C,\ \cdots$ の 1 つ 1 つが集合 $P,\ Q,\ \cdots$ のどれかを合併したものならば $\mathfrak{M}(A,\ B,\ C,\ \cdots) \subset \mathfrak{M}(P,\ Q,\ \cdots)$

証明 1.8 1.5, 1.8 より明らか

定理 1.10 集合 $P,\ Q,\ \cdots$ の 1 つ 1 つが集合 $A,\ B,\ C,\ \cdots$ の 1 つの部分集合であり, 後者の 1 つ 1 つが前者のどれかの合併集合ならば $\mathfrak{M}(P,\ Q,\ \cdots) = \mathfrak{M}(A,\ B,\ C,\ \cdots)$

証明 1.9 1.7, 1.9, 1.2 より明らか

定理 1.11 $A = \mathfrak{M}(P,\ Q,\ \cdots)$ で $B = \mathfrak{M}(Q,\ R)$ ならば, $\mathfrak{M}(A,\ R) = \mathfrak{M}(P,\ B)$

[*1] $A,\ B,\ C,\ \cdots$ を合併した集合 $\mathfrak{M}(A,\ B,\ C,\ \cdots)$ と集合 $A,\ B,\ C,\ \cdots$ 自身を要素とする集合とははっきりと区別すべきである.

証明 1.10　定理 1.10 より $\mathfrak{M}(A,\ R) = \mathfrak{M}(P,\ Q,\ R)$, $\mathfrak{M}(P,\ B) = \mathfrak{M}(P,\ Q,\ R)$

定義 1.5　1 つの事物 g がもし集合 $A,\ B,\ C,\ \cdots$ の 1 つ 1 つに含まれているならば, g は $A,\ B,\ C,\ \cdots$ に「共通な」要素だという. 同様に, もし集合 T が集合 $A,\ B,\ C,\ \cdots$ の 1 つ 1 つの部分集合ならば, T は $A,\ B,\ C,\ \cdots$ の「共通部分」という. 集合 $A,\ B,\ C,\ \cdots$ の「共通集合」とは, $A,\ B,\ C,\ \cdots$ のすべての共通要素 g から構成される集合 $\mathfrak{G}(A,\ B,\ C,\ \cdots)$ のことである. 従って同じ諸集合の共通部分でもある. また, ただ 1 つの集合 A のみの場合も許容するものとする. このとき $\mathfrak{G}(A) = A$ である. 集合 $A,\ B,\ C,\ \cdots$ が共通集合を持たない場合が起こる. このとき, 集合は「共通部分がない」といい, $\mathfrak{G}(A,\ B,\ C,\ \cdots)$ は意味をなさなくなる.

定理 1.12　$A,\ B,\ C,\ \cdots$ のどの共通部分も $\mathfrak{G}(A,\ B,\ C,\ \cdots)$ の部分集合である.

証明 1.11　1.5 より明らか

定理 1.13　$\mathfrak{G}(A,\ B,\ C,\ \cdots)$ のどの部分集合も $A,\ B,\ C,\ \cdots$ の共通部分である.

証明 1.12　1.5, 1.3 より明らか

定理 1.14　集合 $A,\ B,\ C,\ \cdots$ の 1 つ 1 つが集合 $P,\ Q,\ \cdots$ の全体集合ならば $\mathfrak{G}(P,\ Q,\ \cdots) \subset \mathfrak{G}(A,\ B,\ C,\ \cdots)$

証明 1.13　$\mathfrak{G}(A,\ B,\ C,\ \cdots)$ のどの要素も $P,\ Q,\ \cdots$ の共通要素であり, 従って $A,\ B,\ C,\ \cdots$ の共通要素であるから.

2　集合の写像

定義 2.1　1 つの集合 S の「写像」φ とは, 1 つの法則のことであり, この法則に従って S の 1 つ 1 つの確定した要素 s に確定した事物が「属し」, これを s の「像」といい, $\varphi(s)$ で表す. また, $\varphi(s)$ は要素 s に「対応する」とも, $\varphi(s)$ は写像 φ により, s から「生じた」または「生成された」とも, s は写像 φ によって $\varphi(s)$ に「移行した」ともいう. T が S の任意の部分集合ならば, S の写像 φ のうちには, 同時に T の確定した写像を含んでいる. これを簡単のために同じ記号 ϕ で表し, これは集合 T の 1 つ 1 つの要素 t に, S の要素としての t の有する像と, 同じ像 $\varphi(S)$ を対応させることによって成立する. これによって $\varphi(S)$ の意味も明らかになる. 集合の写像の例としてその要素に確定した記号, または名前を付けるだけとする, 集合の最も簡単な写像は, どの要素もそれ自身へ移行させる写像で, これを集合の「合同写像」と呼ぶことにする. 以下の定理では任意の集合 S の任意の写像 φ を取り扱うが, 便宜上要素 s と部分集合 T の像はそれぞれ s', T' で表すことにする. また, ローマ字の小文字, および大文字で「´」のつかないものにはいつでも集合　S の要素および部分集合を意味するものとする.

定理 2.1　$A \subset B$ ならば $A' \subset B'$

証明 2.1　A' の 1 つの要素は A を含まれた要素の像で, B に含まれた要素の像である. その結果 B' の要素となる

定理 2.2　$\mathfrak{M}(A,\ B,\ C,\ \cdots)$ の像は $\mathfrak{M}(A',\ B',\ C',\ \cdots)$ である.

証明 2.2　$\mathfrak{M}(A,\ B,\ C,\ \cdots)$ は 1.5 により S の部分集合だから, これを M で表す. その像 M' のどの要素 m' をとっても M の要素 m の要素であるから, m' は集合 $A,\ B,\ C,\ \cdots$ の 1 つの要素であるから, m' は集合 $A',\ B',\ C',\ \cdots$ の 1 つの要素である. ゆえに 1.4 によって $\mathfrak{M}(A,\ B,\ C,\ \cdots)'$ の要素でのある. だから III より

$$M' \subset \mathfrak{M}(A',\ B',\ C',\ \cdots)$$

また一方では, $A,\ B,\ C,\ \cdots$ は 1.4 により M の部分集合であるから, $A',\ B',\ C',\ \cdots$ は 2.1 によって M' の部分集合である. 従って 1.5 より

$$\mathfrak{M}(A',\ B',\ C',\ \cdots) \subset M'$$

定理 2.3　$A,\ B,\ C,\ \cdots$ の 1 つ 1 つの共通部分の像は, 共通集合 $\mathfrak{G}(A,\ B,\ C,\ \cdots)$ の像 $\mathfrak{G}(A',\ B',\ C',\ \cdots)$ の部分集合である.

証明 2.3　2.1 より $A',\ B',\ C',\ \cdots$ の共通部分についても同じことがいえるので, 1.12 より証明完了となる.

定義 2.2　φ が 1 つの集合 S の写像で, ψ がその像 $S' = \varphi(s)$ の写像だとすれば, これからいつでも φ と ψ を「合併した」S の写像 θ が生じ, これは S の 1 つ 1 つの要素に像

$$\theta(s) = \psi(s') = \psi(\theta(s))$$

を対応させせる. また, $\varphi(s) = s'$ である. この写像 θ は簡単に $\psi\cdot\theta$ により, また, $\psi\cdot\theta$ により表され, 像 $\theta(s)$ は $\psi\theta(s)$ で表される. χ を集合 $\chi(S') = \psi\theta(s)$ の写像の意味とし, η を ψ と χ とを合併した集合 S' の写像 $\chi\psi$ とすると, $\chi\theta(s') = \eta\varphi(s)$ だから, 合併した写像 $\chi\theta$ と $\eta\varphi$ である. θ と η の意味から

$$\chi\cdot\psi\varphi = \chi\psi\cdot\varphi$$

と表し, この $\varphi,\ \psi,\ \chi$ を合併した写像は簡単に $\varphi\psi\chi$ で表される.

3　写像の相似, 相似集合

定義 3.1　1 つの集合 S の写像 φ は, もし集合 S の相異なる要素 $a,\ b$ がいつでも相異なる像 $a' = \varphi(a),\ b' = \varphi(b)$ に対応するならば「相似」写像だという. この場合, $s' = t'$ からいつでも $s = t$ が出てくるから, 集合 $S' = \varphi(s)$ の 1 つ 1 つの要素 s' は集合 S の 1 つの確定した要素 s の要素である. このことから S の写像 φ には, 集合 S' の $\overline{\varphi}$ と表す「逆の」写像が成立する. これは S' の 1 つ 1 つ要素 s' に像 $\overline{\varphi}(s') = s$ が対応し, 明らかに相似である. $\overline{\varphi} = s$ であること, φ は $\overline{\varphi}$ に属する逆の写像と, 2.2 によって φ と $\overline{\varphi}$ とを合併した写像 $\varphi\overline{\varphi}$ は S の合同写像であることはいずれも明らかである. 同時に 2 の補遺として, そこの記号と同じものを用いて次のものを得る.

定理 3.1　$A' \subset B'$ ならば $A \subset B$ である.

証明 3.1　a が A の要素ならば a' は A' の要素であり, 従って B' の要素でもあるから $a' = b'$. ここに, b は B の 1 つの要素であるが, $a' = b'$ からいつでも $a = b$ が得られるから, A のどの要素もまた B の要素である.

定理 3.2　$A' = B'$ ならば $A = B$ である.

証明 3.2　3.1, 1.1, 1.2 より明らか

定理 3.3　$G = \mathfrak{G}(A,\ B,\ C,\ \cdots)$ ならば $G' = \mathfrak{G}(A',\ B',\ C',\ \cdots)$

証明 3.3　$\mathfrak{G}(A',\ B',\ C',\ \cdots)$ のどの要素も S' に含まれているから, 従って S のうちに含まれていた要素 g の像 g' である. ところが, g' は $A',\ B',\ C',\ \cdots$ の共通要素だから, g は 3.1 より $A,\ B,\ C,\ \cdots$ の共通要素でなければならない. よって $\mathfrak{G}(A',\ B',\ C',\ \cdots)$ のどの要素も G の要素 g の像である. すなわち, $\mathfrak{G}(A',\ B',\ C',\ \cdots) \subset G'$ であって, 2.3, 1.2 より定理を得る.

定理 3.4　1 つの集合の合同写像はいつでも相似写像である.

証明 3.4　集合 S の合同写像 φ はいつで集合 S の相異なる $a,\ b$ に対して $a' = \varphi(a) = a,\ b' = \varphi(b) = b$ であり, 明らかに相似写像である.

定理 3.5　もし φ が S の相似写像で, ψ が $\varphi(S)$ の相似写像ならば, φ と ψ を合併した S 写像 $\psi\varphi$ もやはり相似であり, これに属する逆写像 $\overline{\psi\varphi} = \overline{\psi}\overline{\varphi}$ である.

証明 3.5　S の相異なる要素 $a,\ b$ には相異なる像 $a' = \varphi(a),\ b' = \varphi(b)$ が対応し, 相異なる像 $\psi(a') = \psi\varphi(a),\ \psi(b') = \psi\varphi(b)$ が対応するから, $\psi\varphi$ は相似である. そのうえ集合 $\psi\varphi(S)$ の 1 つ 1 つの要素 $\psi\varphi(s) = \psi(s')$ は $\overline{\psi}$ によって $s' = \psi\varphi(s)$ に移行し, $\overline{\psi}$ によって s に移行する. 従って $\psi\varphi(s)$ は $\overline{\psi}\overline{\varphi}$ によって s に移行する.

定義 3.2　集合 $R,\ S$ はもし S の相似写像で, $\varphi(S) = R$ になるものが存在すれば, 相似であると呼ばれる. このとき, $\varphi(k) = S$ である. 3.4 より 1 つ 1 つの集合は自分自身と相似であることは明らかである.

定理 3.6　もし $R,\ S$ が相似写像ならば, R と相似な集合 Q は S と相似である.

証明 3.6　$\varphi,\ \psi$ を $S,\ R$ の相似写像で, $\varphi(S) = R,\ \psi(R) = Q$ とすると, 3.5 より $\psi\varphi$ は S の相似写像で, $\psi\varphi(S) = Q$ である.

定義 3.3　以上よりあらゆる集合を「類」に分けることができる. それには確定した 1 つの類に入れ, R をこの類の「代表者」とする. 3.6 よりこの類に属する別の集合 S を代表者に選んでも類は変わらない.

定理 3.7　$\$R,\ S$ が相似集合なら, S のどの部分集合も R の 1 つの部分集合に, S のどの真部分集合も R の 1 つの真部分集合に相似である.

証明 3.7　φ が S の相似写像で, $\varphi(S) = R,\ T \subset S$ ならば 2.1 より T と相似な集合 $\varphi(T)$ は $\varphi(T) \subset R$ である. さらに, T が S の真部分集合ならば, s g T のうちに含まれていない S の要素ならば, R に含まれる要素 $\varphi(s)$ は 3.1 より $\varphi(T)$ には含まれない. 従って $\varphi(T)$ は R の真部分集合である.

4　集合の自分自身の中への写像

定義 4.1　もし φ が集合 S の相似な, または相似でない写像で, $\varphi(S)$ が集合 Z の部分集合ならば, φ を S の Z の「中へ」の写像と呼び, S は φ によって Z の中へ写像されたという. 従ってもし $\varphi \subset S$ ならば, φ を集合 S の「自分自身の中へ」の写像と呼び, このような写像 φ の一般的法則について述べる. 2 と同じ記号を用いて $\varphi(s) = s',\ \varphi(T) = T'$ とおく. これらの像 $s',\ T'$ は 2.1, 3.1 より S の要素, または部分集合だから, ローマ字で表したあらゆる事物と同様である.

定義 4.2　もし $K' \subset K$ ならばK を「連鎖」という. 集合 S の部分集合 K だけでは連鎖とはならない. ただ確定した写像 φ に関連させてのみ与えられる. 集合 S の自分自身の中への別の写像に関しては K は連鎖にならないことも十分にある.

定理 4.1　S は連鎖である.

定理 4.2　連鎖 K の像 K' は連鎖である.

証明 4.1　$K' \subset K$ から 2.1 より $(K')' \subset K'$ が出てくる.

定理 4.3　A が連鎖 K の部分集合ならば $A' \subset K$ である.

証明 4.2　$A \subset K$ より $A' \subset K'$, しかし 4.2 より $K' \subset K$ なので 1.3 から $A' \subset K$

定理 4.4　もし像 A' が連鎖 L の部分集合ならば 1 つの連鎖 K で $A \subset K,\ K' \subset L$ なる条件を満足するものが存在する. しかも $\mathfrak{M}(A,\ L)$ はこのような連鎖 K である.

証明 4.3　$K = \mathfrak{M}(A,\ L)$ とおくと 1.4 より $A \subset K$. 2.2 より $K' = \mathfrak{M}(A',\ L')$ なので, 仮定より $A, \subset L,\ L' \subset L$ である. 従って 1.5 よりもう 1 つの条件 $K' \subset L$ も満足する. このことから 1.4 より $L \subset K$ だから $K' \subset K$ すなわち K は連鎖である.

定理 4.5　連鎖 $A,\ B,\ C,\ \cdots$ のみを合併した集合 M は連鎖である.

証明 4.4　2.2 より $M' = \mathfrak{M}(A',\ B',\ C',\ \cdots)$ で, 仮定より $A' \subset A,\ B' \subset B,\ C' \subset C,\ \cdots$ だから, 1.7 より $M' \subset M$ である.

定理 4.6　連鎖 $A,\ B,\ C,\ \cdots$ のみの共通集合 G は連鎖である.

証明 4.5　G は 1.5 より $A,\ B,\ C,\ \cdots$ の共通部分だから, G' は 2.1 より $A',\ B',\ C',\ \cdots$ の共通部分である. 仮定より $A' \subset A,\ B' \subset B,\ C' \subset C,\ \cdots$ だから 1.3 より G' は $A,\ B,\ C,\ \cdots$ の共通集合であるから, 1.12 より G の共通集合である.

定義 4.3　A が S の勝手な部分集合とする. A を部分集合とする連鎖 (例えば S) のすべてをとり, それの共通集合を A_0 で表す. この共通集合 A_0 は存在する. というのも A 自身がこれらすべての連鎖の共通部分だからである. さらに A_0 は 4.6 より連鎖なので A_0 を「集合 A の連鎖」または単に A の連鎖と呼ぶ.

定理 4.7　$A \subset A'$ である.

証明 4.6　A は共通集合が A_0 であるようなあらゆる連鎖の共通部分なので 1.12 より $A \subset A_0$

定理 4.8　$(A_0)' \subset A_0$ である.

証明 4.7　4.3 より A_0 は連鎖であるから.

定理 4.9　A が連鎖 K の部分集合ならば $A_0 \subset K$ である.

証明 4.8　A_0 は A を部分集合とするあらゆる連鎖 K の共通集合であり, 共通部分であるから.

4.3 で定義した連鎖 A_0 の概念は前の定理 4.7, 4.8, 4.9 により余すところなく特徴づけられる.

定理 4.10　$A' \subset (A_0)'$ である.

証明 4.9　4.7, 2.1 より明らか.

定理 4.11　$A' \subset A_0$ である.

証明 4.10　4.10, 4.8, 1.3 より明らか.

定理 4.12　A が連鎖ならば $A = A_0$ である.

証明 4.11　A は連鎖 A の部分集合だから 4.9 より $A_0 \subset A$ なので 4.7, 1.2 より明らか.

定理 4.13　$B \subset A$ ならば $B \subset A_0$ である.

証明 4.12　4.7, 1.3 より明らか.

定理 4.14　$B \subset A_0$ ならば $B_0 \subset A_0$ であり, 逆も成立する.

証明 4.13　A_0 は連鎖なので 4.9 より $B \subset A_0$ からまた $B_0 \subset A_0$. 逆に $B_0 \subset A_0$ ならば 4.7 から $B \subset B_0$ なので $B \subset A_0$

定理 4.15　$B \subset A$ ならば $B_0 \subset A_0$ である.

証明 4.14　4.13, 4.14 より明らか.

定理 4.16　$B \subset A_0$ ならば $B' \subset A$ である.

証明 4.15　4.14 より $B_0 \subset A_0$, 4.11 より $B \subset B'$ だから 1.3 より $B' \subset A_0$

定理 4.17　$B \subset A_0$ ならば $(B_0)' \subset (A_0)'$ である.

証明 4.16　4.14, 2.1 より明らか.

定理 4.18　$\varphi(\varphi_0(A)) = \varphi_0(\varphi(A))$ と表すことができる.

証明 4.17　$(A_0') = L$ とおくと, 4.3 より L は連鎖であり, 4.7 より $A' \subset L$ なので, 4.4 より連鎖 K で条件 $A \subset K$, $K' \subset L$ を満足するものが存在する. これから 4.9 により $A_{\subset}K$, それゆえ $(A_0)' \subset K'$, 1.3 より $(A_0)' \subset L$ が出てくる. すなわち, $(A_0)' \subset (A')_0$ である. ところが 4.10 よりさらに $A' \subset (A_0)'$ であり, 4.3, 4.2 より $(A_0)'$ は連鎖なので 4.9 より $(A')_0 \subset (A_0)'$ である. 以上より

1.2 から $(A')_0 = (A_0)'$ を得る.

定理 4.19　$A_0 = \mathfrak{M}(a,\ A'_0)$, すなわち A の連鎖は A と A の像連鎖を合併したものである.

証明 4.18　$L = A'_0 = (A_0)' = (A)',\ K = \mathfrak{M}(A,\ L)$ とおく. 4.7 より $A' \subset L$, L は連鎖なので 4.4 より同じことが K についても成立する. さらに 1.4 より $A \subset K$ なので 4.9 より $A_0 \subset K$. 一方 4.7 より $A \subset A_0$ だから 4.8 より $L \subset A_0$. 従って 1.5 より $K \subset A_0$. 以上より 1.2 から $A_0 = K$ である.

定理 4.20　連鎖 A_0 がある任意の集合 Σ(S の部分集合でなくてもよい) の部分集合であることを証明するためには以下を示せばよい.

- ρ　$A \subset \Sigma$
- σ　A_0 と Σ とのどの要素の像も Σ の要素である.

証明 4.19　ρ が真ならば 4.7 よりいずれの場合でも共通集合 $G = \mathfrak{G}(A_0,\ \Sigma)$ が存在し, 1.12 より $A \subset G$ である. ところが 1.5 より $G \subset A_0$ である. そうすると G はまた集合 S の部分集合であり, S は φ により自分自身の中へ写像され, 同時に 4.16 より $\mathfrak{G}' \subset A_0$ を得る.
σ が真ならば, すなわち $G' \subset \Sigma$ ならば, G' は集合 $A_0,\ \Sigma$ の共通部分だから, 1.12 より, すなわち 4.2 より G は連鎖である. $A \subset G$ なので 4.9 より $A_0 \subset G$, 以上より $G = A_0$. ゆえに 1.5 からまた $A_0 \subset \Sigma$ である.

定義 4.4　4.20 は「完全帰納法」(n から $n+1$ への結論) というもので知られた証明法で, 次のように表現する.
連鎖 A_0 のあらゆる要素がある一定の性質 $\mathbb{E}$ を有する (あるいは 1 つの確定しない事物 n を問題とする定理 $\mathbb{S}$ が現実に連鎖 A_0 のあらゆる要素 n に対して成立する) ことを証明するために次を示せばよい.

- ρ　集合 A のあらゆる要素 a が性質 $\mathbb{E}$ を有する. (または $\mathbb{S}$ はあらゆる a に対して成立する)
- σ　性質 $\mathbb{E}$ を有するような A_0 の 1 つ 1 つの要素 n の像 n' にも同じ性質 $\mathbb{E}$ がある (または定理 $\mathbb{S}$ が A_0 の 1 つの要素 n に対して成立しさえすればその像 n' に対しても成立しなければならない). 現に性質 $\mathbb{S}$ を有するような (または定理 $\mathbb{S}$ が成立するような) あらゆる事物の集合を Σ で表すと, 定理のここに用いた表現の仕方と 4.20 で用いたものは余すところなく一致することは明らかである.

定理 4.21　$\mathfrak{M}(A,\ B,\ C,\ \cdots)$ の連鎖は $\mathfrak{M}(A_0,\ B_0,\ C_0,\ \cdots)$ である.

証明 4.20　前の集合を M, 後の方を K で表すと, K は 4.5 より連鎖である. どの集合 ABC も 4.7 より集合 $\mathfrak{M}(A_0,\ B_0,\ C_0,\ \cdots)$ の部分集合なので, 1.7 より $M \subset K$ である. 従って 4.9 から $M_0 \subset K$ である. また, 1.4 よりどの集合 $A,\ B,\ C,\ \cdots$ も M の部分集合だから 4.9, 1.3 より連鎖 M_0 の部分集合である. よって 4.9 よりどの集合 $\mathfrak{M}(A_0,\ B_0,\ C_0,\ \cdots)$ も M_0 の部分集合だから, 1.5 より $K \subset M_0$ である. 以上より $M_0 = K$

定理 4.22　$\mathfrak{G}(A,\ B,\ C,\ \cdots)$ の連鎖は $\mathfrak{G}(A_0,\ B_0,\ C_0,\ \cdots)$ の部分集合である.

証明 4.21　前の方を G, 後ろを K で表すと, K は 4.6 より連鎖である. 集合 $A',\ B',\ C',\ \cdots$ の 1 つ

1 つは 4.7 より集合 $A,\ B,\ C,\ \cdots$ の 1 つの集合の全体集合, 1.14 より $G \subset K$ である. 従って 4.9 より $G_0 \subset K$ を得る.

5　有限と無限

定義 5.1　集合 S は, もしそれ自身の真部分集合に相似ならば「無限」であるといい, そうでない場合には S を「有限」であるという.

定理 5.1　ただ 1 つの要素からなる集合はどれも有限である.

証明 5.1　このような集合は真部分集合を有しないから.

定理 5.2　無限集合は存在する.

証明 5.2　思考の対象となりうるあらゆる事物の全体 S は無限である. というのも, もし s が S の要素とすると, s は思考の対象であり得るという考え s' はそれ自身 S の要素である. これを s の像 $\varphi(s)$ とみなせば, これにより確定する S の写像 φ は, その像 S' が s の部分集合であるという性質を有している. しかも S' は S の真部分集合である. なぜなら, S のうちにはこのようなどの考え S' とも異なり, 従って S' のうちには含まれないような要素が存在しているからである. $a,\ b$ が異なる要素ならば, その像 $a',\ b'$ は相異なることは明らかであるから, 写像 φ は区別のつく (相似) 写像である. ゆえに S は無限である.

定理 5.3　R と S とが相似集合ならば, S が有限であるか無限であるかに従って R は有限であるか, 無限であるかである.

証明 5.3　もし S が無限とすると, それ自身の真部分集合 S' に相似である. もし, R と S とが相似ならば, S' は 3.6 より R と相似であり, 4.1 より同時に R の真部分集合と相似でなければならないし, それゆえ 3.6 より R は相似である.

定理 5.4　どの集合 S でもそれが無限集合 T を有するなら, S は無限である. また, 有限集合の部分集合は有限である.

証明 5.4　T が無限ならば, T の相似写像 ψ で $\psi(T)$ は T の真部分集合になるものがある. もし T が S の部分集合ならば, この写像 ψ を S の写像 φ に拡張することができる. s を S の任意の要素として, s が T の要素であるかそうでないかに従って $\varphi(s) = \psi(s),\ \varphi(s) = s$ とおく. この写像 φ は相似である. 例えば, $a,\ b$ が S の相異なる要素とすれば, ともに T に含まれていれば, 像 $\varphi(a) = \psi(a)$ は像 $\varphi(b) = \psi(b)$ とは異なる. なぜなら, ψ が相似写像だからである. さらに, a が T に含まれ, b が T に含まれていなければ, $\varphi(a) = \psi(a)$ は $\varphi(b) = \psi(b)$ とは相異なる. さらに, $\psi(T)$ が T の部分集合ならば, 1.3 よ S の部分集合であるから, $\varphi(S) \subset S$ も明らかである. $\psi(T)$ が T の部分集合ならば, T のうちにはまた S のうちに 1 つの要素で, $\psi(T) = \varphi(T)$ に含まれないものがある. しかし, T に含まれないどの要素 s の像 $\varphi(s)$ も $\varphi(s) = s$ だから, 従ってまた t とは相異なるから t はどうしても $\varphi(S)$ に含まれるわけにはいかない. 従って $\varphi(s)$ は S の真部分集合であり, ゆえに S は無限である.

定理 5.5　a が S の要素ならば, a とは相異なるあらゆる S の要素の全体 T が有限ならば, S もまた

有限である.

証明 5.5　もし ψ が S の自分自身の中への任意の相似写像ならば, 5.1 より像 $\varphi(S)$ すなわち S' はどんなときも S の部分集合にはならず, いつでも $S' = S$ であることを示す. $S = \mathfrak{M}(a,\ T)$ は明らかで, 従って 2.2 より像をプライムで表せば, $S' = \mathfrak{M}(a',\ T')$ である. 写像 φ の相似性より a' は T' には含まれない. ところがさらに, 仮定より $S' \subset S$ だから, a' とまた T' のどの要素も同様に $= a$ であるか, T の要素であるかのいずれか 1 つである. 従ってもし a が T' に含まれていなければ, $T' \subset T$ でなければならないし, 従って $T' = T$ でなければならない. というのは, φ は相似写像であり, T は有限集合だからである. そうして a' は T' の中にないから, すなわち T に含まれないから, $a' = a$ でなければならない. この場合は $S' = S$ となり, 成立する. もし a が T' に含まれていて, T に含まれる要素 b の像 b' であるとすると, b とは相異なるあらゆる T の要素 u の全体を U と表すことにする. $T = \mathfrak{M}(b,\ U)$ で 1.10 より $S = (a,\ b,\ U)$ で, その結果 $S' = \mathfrak{M}(a',\ a,\ U')$ である. 次に T の新たな写像 ψ を次のように決定する. すなわち $\psi(b) = a'$ で一般に $\psi(u) = u'$ とおく. これにより 2.2 より $\psi(T) = \mathfrak{M}(a',\ U')$ になる. ψ が相似写像であることは明らかである. というのも, ψ はそういう写像であり, a は U の中にないから, その結果 a' は U' に含まれないからである. さらに a と 1 つ 1 つの要素 u とは b と相異なるから, また a' と 1 つ 1 つの要素 u' とは a と相異なるから従って T に含まれていなければならない. よって $\psi(T) \subset T$ で T は有限だから, $\psi(T) = T$ でなければならない. その結果 $\mathfrak{M}(a',\ a,\ U) = \mathfrak{M}(a,\ T)$ すなわち $S' = S$ で, この場合にも求める証明が得られた.

6　単純無限集合, 自然数系列

定義 6.1　1 つの集合 N は N を自分自身の中へ移す相似写像が存在して, その結果 N が $\varphi(N)$ に含まれない 1 つの要素の連鎖としてあらわれてくるとき, 「単純無限集合」と呼ぶ. この要素をいかには記号「1」で表す. これを N の「基礎要素」と呼び, 同時に単純無限集合にはこの写像 φ によって「順序付けられる」という. 像と連鎖に対して, 前 (4) に用いた記号をそのまま続けて使うとすると, その結果, 単純無限集合 N の本質は N の写像 φ と要素 1 の存在に存することになり, これらは次の条件 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ を満足する.

- α　$N' \subset N$
- β　$N = 1_0$
- γ　要素 1 は N' に含まれない.
- δ　写像 φ は相似である.

明らかに $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ から, どの単純無限集合 N も実の無限集合であることが結論される. というのは, N は自身の真部分集合 N' と相似だからである.

定理 6.1　どの無限集合 S のうちにも単純無限集合 N は部分集合として含まれる.

証明 6.1　5.1 より, $\varphi(S)$ すなわち S' が S の真部分集合になるような相似写像は存在する. 従って S のうちには S' には含まれない要素 1 が存在する. 連鎖 $N = 1_0$ は, 集合 S の自分自身の中への写像 φ に対応するもので, φ によって順序付けられた単純無限集合である. なぜなら, 6.1 における特徴を示す条件 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ は明らかにすべてを満たしているから.

定義 6.2　写像 φ によって順序付けられた単純無限集合 N にあたって, 要素の特殊な性質を度外視して, その区別のつくことだけを固持し, 順序付ける写像ならば, これらの要素を「自然数」または「順序数」または単に「数」と呼び, 基礎要素 1 を「数系列」N の「基礎数」と呼ぶ. 6.1 における条件 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ だけから導き出された関係, または法則はそれゆえすべての順序付けられた単純無限集合においていつも同一のものであって, 個々の要素にその本質にかかわりなく付随的に与えられた名前がどんなものであろうとも「数論」の第 1 の対象となるものである. 1 つの集合の自分自身の中への写像についての 4 の一般的な概念や定理から, まず, 直後に次のような基礎定理が引き出される. ここに $a,\ b,\ \cdots,\ m,\ n$ ではいつでも N の要素, 従って数を $A,\ B,\ \cdots,$ では N の部分集合を, $a',\ b',\ \cdots,\ m',\ n'$ と $A',\ B',\ C',\ \cdots,$ とではこれらに対応する像を意味する. これらは順序付ける写像 φ によって作り出されたもので, また N の要素, または部分集合である. 1 つの数 n の像 n' は n に「続く」数, n の次の数とも呼ばれる.

定理 6.2　1 つ 1 つの数 n は 4.7 より, その連鎖 n_0 に含まれ, 4.14 より条件 $n \subset m_0$ は $n_0 \subset m_0$ と同値である.

定理 6.3　4.18 より $n'_0 = (n_0)' = (n')_0$

定理 6.4　4.8 より $n'_0 \subset n_0$

定理 6.5　4.19 より $n_0 = \mathfrak{M}(n,\ n'_0)$

定理 6.6　$N = \mathfrak{M}(1,\ N')$ である. 従って基礎数 1 と相異なるどの数も N' の要素, すなわち 1 つの数の像である.

証明 6.2　5.5, 6.1 より明らか.

定理 6.7　N はそのうちに基礎数を含むただ 1 つの数連鎖である.

証明 6.3　もし 1 が 1 つの数連鎖 K の要素であるとすると, 4.9 よりこれに属する連鎖 $N \subset K$ であり, 従って $N = K$ である.

1 つの定理が 1 つの連鎖 m_0 のあらゆる数に対して成立することを証明するためには

- ρ 定理は $n = m$ に対して証明すること
- σ 定理が連鎖 m_0 の 1 数 n 日して成立することから, いつでもそれに続く数 n' に対しても成立することがでてくること

を証明すればよい. このことは一般的な定理 4.20 や 4.4 から直接得られる. 最もよく起こるのは $m = 1$ のときで, 従って m_0 が全数系列 N である場合である.

7　「より大きい数」と「より小さい数」

定理 7.1　1 つ 1 つの数は, これに続く数 n' とは相異なる.

証明 7.1　完全帰納法より証明する.

ρ　この数は 6.1 より N' に含まれていない. これに続く数 $1'$ は N に含まれる数 1 の像だから N'

の像である. 従って $n=1$ に対して真である.

σ　1 数 n に対して成立し, これに続く数を $n'=p$ とおくと, n は p とは異なる. これから 3.1 より順序付ける写像 φ の相似性のために, n', 従って p は p' とは相異なる. よって n に続く数 p に対しても成立する.

定理 7.2　1 数 n の像連鎖 n'_0 のうちには 6.2, 6.3 よりその像 n' は含まれているが, 数 n 自身には含まれない.

証明 7.2　完全帰納法を用いる.

ρ　$1'_0 = N'$ であり, 6.1 より基礎数 1 は N' に含まれないため, $n=1$ に対して真である.

σ　1 数 n に対して成立し, $n'=p$ とおくと, そのとき n は p_0 のうちに含まれない. 従って p_0 のうちに含まれるどの数 q とも相異なる. よって φ の相似性から, n' 従って p は p'_0 に含まれるどの数 q' とは相異なるから, p'_0 のうちには含まれない. よって n に続く数 p に対しても成立する.

定理 7.3　像連鎖 n'_0 は連鎖 n_0 の真部分集合である.

証明 7.3　6.4, 6.2, 7.2 より明らか.

定理 7.4　$m_0 = n_0$ より $m=n$ である.

証明 7.4　6.2 より m は m_0 に含まれるから, $m_0 = n_0 = \mathfrak{M}(n,\ n'_0)$ であり, 6.5 から, もしこの定理が偽ならば, m と n とは相異なるから, m は連鎖 n'_0 のうちに含まれなければならない. 従って 6.2 より $m_0 \subset n'_0$ すなわち $n_0 \subset n'_0$ となるが, これは 7.3 に矛盾する. 以上より $m=n$

定理 7.5　数 n が数連鎖 K のうちに含まれないならば $K \subset n'_0$ である.

証明 7.5　完全帰納法を用いる.

ρ　6.6 より $n=1$ に対して真である.

σ　1 数 n に対して成立するとき, これに続く数 $p=n'$ に対して, もし p が数連鎖 K に含まれていないならば, 4.3 より n もまた K に含まれていない. 従って仮定より $K \subset n'_0$ である. ところが, 6.5 より

$$n'_0 = p_0 = \mathfrak{M}(p,\ p'_0)$$

従って

$$K \subset \mathfrak{M}(p,\ p'_0)$$

なので. p は K に含まれない. よって $K \subset p'_0$ とならなければいけない. 以上より次の数 n' に対しても成立する.

定理 7.6　数 n は数連鎖 K に含まれていないが, その像 n' が K に含まれていれば, $K = n'_0$ である.

証明 7.6　n は K い含まれていないから, 7.5 より $K \subset n'_0$ である. また, $n' \subset K$ だから, 4.9 より $n'_0 \subset K$. 従って $K = n'_0$ である.

定理 7.7　どの数連鎖 K のうちに 1 つの数 k でその連鎖 $k_0 = K$ になるものが存在し, これはただ 1 つに限る.

証明 7.7　基礎数 1 が $1K$ に含まれていれば, 6.7 より $K = N = 1_0$ である. そうでない場合には, K に含まれないすべての数の集合を Z とする. そうすると, 基礎数 1 は Z に含まれるが, Z は数系列 N の真部分集合にすぎないから, 6.7 より Z は連鎖ではない. すなわち Z' は Z の部分集合ではない. よって Z のうちには 1 数 n でその像 n' が Z に含まれないものが存在する. 従って n' は K に含まれる. ところが n は Z のうちにあるから, 従って K のうちに含まれない. ゆえに 7.6 より $K = n'_0$ で $K = n'$ である.

定理 7.8　m と n とは相異なる数とすると, 7.3, 7.4 より, 連鎖 $m_0,\ n_0$ のうちの一方だけが, もう一方の真部分集合であり, $n_0 \subset m'_0$ か $m_0 \subset n'_0$ の一方だけが成立する.

証明 7.8　n が m_0 に含まれていれば, 6.2 より $n_0 \subset m_0$ だから, m は連鎖 n_0 に含まれない. (もしそうでないならば, 6.2 より $m_0 \subset n_0$ だから $m_0 = n_0$ で 7.4 より $m = n$ となる.) よって 7.5 より $n_0 \subset m'_0$ がでてくる. そうでない場合, もし n が連鎖 m_0 に含まれていなければ, 7.5 より $m_0 \subset n'_0$ でなければならない.

定義 7.1　もし条件 $n_0 \subset m'_0$ ならば, 6.2 より $n \subset m'_0$ と表すこともできるが, このとき数 m は数 n「より小さい」といい, 同時に n は m「より大きい」という. 記号では $m < n,\ n > m$ と書く.

定理 7.9　m と n とが任意の数ならば, いつでも次の $\lambda,\ \nu,\ \mu$ の場合のうち, 1 つのみが起こる.

λ　$m = n,\ n = m$ すなわち $m_0 = n_0$
μ　$m < n,\ n > m$ すなわち $n_0 \subset m_0$
ν　$m > n,\ n < m$ すなわち $m_0 \subset n_0$

証明 7.9　もし λ が起きれば, μ と ν も起こらない. 7.3 より $n'_0 \subset n'_0$ となることはないため, もし λ と ν のうち一方だけが起こる.

定理 7.10　$n < n'$ である.

証明 7.10　7.9 の場合, ν に対する条件は $m = n'$ によって満足される.

定義 7.2　$m = n$ であるか, または $m < n$ であるか, 従って $m > n$ でないことを表すために次の記号を用いる.

$$m \leq n,\ \text{または}\ n \geq m$$

そうして m は「多くても」n に等しい, n は「少なくとも」m に等しいという.

定理 7.11　次の条件 $m \leq n,\ m < n',\ n_0 \subset m$ のどれもが他のどれとも同値である.

証明 7.11　$m \leq n$ なら, 7.9 の $\lambda,\ \mu,\ \nu$ からいつでも $n_0 \subset m_0$ である. なぜなら, 6.4 より $m'_0 \subset m_0$ であるから. 逆に $n_0 \subset m_0$ ならば, 6.2 より $n \subset m_0$ だから, $m_0 = \mathfrak{M}(m,\ m'_0)$ から, $n = m$ であるか, $n \subset m'_0$, すなわち $n > m$ かのいずれか一方である. してみると, 条件 $m \leq n$ は $n_0 \subset m_0$ と同値である. そのうえ 2.1, 3.1, 6.3 からこの条件 $n_0 \subset m_0$ はまた $n'_0 \subset m'_0$ と同値である. すなわち 7.9 の μ から $m < n'$ である.

定理 7.12　次の条件 $m' \le n,\ m' < n',\ m < n$ のどれもがほかのどれとも同値である.

証明 7.12　7.11 より明らか. m を m' と置き換えれば 7.9 の μ から出てくる.

定理 7.13　もし $l < m$ で, $m \le n$ ならば, または $l \le m$ で $m < n$ ならば, $l < m$ である. しかしもし $l \le m$ で $m \le n$ ならば $l \le n$ である.

証明 7.13　7.1, 7.11 よりこれに対応する条件 $m_0 \subset l_0'$ と $n_0 \subset m_0$ とから 1.3 より $n_0 \subset l_0'$ であり, 同じことが条件 $m_0 \subset l_0$ と $n_0 \subset m_0'$ とからも得られる.

定理 7.14　N のどの部分集合 T にもただ 1 つの「最小」数 k が存在する. すなわちこの数 k は T に含まれているどの数よりも小さい数である. T がただ 1 つの数から構成されるとき, この数は T における最小数である.

証明 7.14　T_0 は連鎖だから 7.7 より 1 数 k で, それの連鎖 $k_0 = T_0$ になるものが存在する. これから 4.7, 6.5 より $T \subset \mathfrak{M}(k,\ k_0)$ がでてくるから, まず, k 自身は T に含まれていなければならない. (もしそうでないとすると, $T \subset k_0'$ だから 4.9 より $t_0 \subset k_0'$ で, すなわち $k_0 \subset k_0'$ になるから, 7.3 より不可能) そのうえ集合 T のうちの数で, k と相異なるどの数 x も k_0' に含まれていなければならないから, すなわち $x > k$ でなければならない. これから同時に 7.9 より T のうちにはただ 1 つの最小数が存在するということだけがでてくる.

定理 7.15　連鎖 n_0 の最小数は n であり, 基礎数 1 はあらゆる数のうちの最小数である.

証明 7.15　6.2, 7.11 より条件 $m \subset n_0$ は $m \ge n$ と同値であるから. また, 求める定理はこの前の証明から明らかである. (もし前の定理で $T = n_0$ にとれば, 明らかに $k = n$ となるからである.)

定義 7.3　n を勝手な数とするとき, n より「大きくない」, 従って n_0' のうちに含まれないようなすべての数の集合を Z_n で表すとき, 次の $m \subset Z_m$ は 7.2, 7.11 より明らかに次の条件のどれも同値である.

$$m \le n,\ m < n',\ n_0 \subset m_0$$

定理 7.16　$1 \subset Z_n$ で, $n \subset Z_n$ であるから.

証明 7.16　7.3, または 6.1 と 7.2 より明らかである.

定理 7.17　7.3 より同値の諸条件

$$m \subset Z_n,\ m \le n,\ m < n',\ n_0 \subset m_0$$

のどれもが次の条件

$$Z_m \subset Z_n$$

と同値である.

証明 7.17　もし $m \subset Z_n$ ならば, $m \le n$ であり, もし $l \subset Z_m$ ならば $l \le m$ で, そうすると 7.13 より $l \le n$ で, すなわち $l \subset Z_n$ である. だからもし $m \subset Z_n$ ならば集合 Z_m のどの要素も Z_n の要素である. すなわち $Z_m \subset Z_n$ となる. 逆にもし $Z_m \subset Z_n$ ならば 1.3 より $m \subset Z_n$ でなければならない.

定理 7.18　7.9 における場合, $\lambda,\ \mu,\ \nu,$
に対する条件は次のように素元される.

λ　$m = n,\ n = m,\ Z_m = Z_n$
μ　$m < n,\ n > m,\ Z_m \subset Z_n$
ν　$m > n,\ n < m,\ Z_n \subset Z_m$

証明 7.18　7.17 より条件 $n_0 \subset m_0$ と $Z_m \subset Z_n$ が同値であるから, 7.9 より直接得られる.

定理 7.19　$Z_1 = 1$ である.

証明 7.19　基礎数 1 は 7.16 より Z_1 に含まれ, 1 と相異なる数は 6.6 より $1'_0$ のうちに含まれ, 従って 7.3 より Z_1 に含まれないからである.

定理 7.20　7.3 より $N = \mathfrak{M}(Z_n,\ n'_0)$ である.

定理 7.21　$n = \mathfrak{G}(Z_n,\ n)$ である, すなわち n は集合 Z_n と n_0 とのただ 1 つの共通要素である.

証明 7.20　7.16, 6.2 から n は Z_n と n_0 とに含まれる. しかも連鎖 n_0 のうちの n と異なるどの要素も 6.5 より n'_0 に含まれ, 従って 7.3 より Z_n に含まれない.

定理 7.22　7.10, 7.3 の結果として数 n' は Z_n に含まれない.

定理 7.23　$m < n$ ならば, Z_m は Z_n の真部分集合で, 逆もまた成立する.

証明 7.21　もし $m < n$ ならば, 7.17 より $Z_m \subset Z_n$ であり, 7.16 より Z_n に含まれる. 数 n は 7.3 より Z_m に含まれないからである. というのは, $n > m$ の場合, Z_m は Z_n の真部分集合だからである. 逆にもし Z_m が Z_n の真部分集合ならば, 7.17 より $m \leq n$ であり, $m = n$ ではありえない. というのはもしそうでなければ, $Z_m = Z_n$ となるからである. 従って $m < n$

定理 7.24　Z_n は $Z_{n'}$ の真部分集合である.

証明 7.22　7.23 より明らかである.

定理 7.25　$Z_{n'}$ に含まれるどの数も 7.3 より $\leq n'$ だから, 従って $= n'$ か $< n'$ かのいずれかである. 従って 7.3 より Z_n の要素である. してみると, 確かに

$$Z'_n \subset \mathfrak{M}(Z_n,\ n')$$

ところが逆に 7.24 より $Z_n \subset Z_{n'}$ で, 7.16 より $n' \subset Z_n$ だから, 1.5 より $\mathfrak{M}(Z_n,\ n') \subset Z_{n'}$ ゆえに求める定理は 1.2 より得られる.

定理 7.26　集合 Z_n の像 Z'_n は集合 Z'_n の真部分集合である.

証明 7.23　Z'_n に含まれるどの数も Z_n に含まれる数 m の像 m' であり, $m \leq n$ なので, 7.12 より $m' \leq n'$ で, 7.3 より $Z'_n \subset Z_{n'}$ となる. ところがさらに数 1 は 7.16 より $Z_{n'}$ に含まれるが, 6.1 より像 Z'_n に含まれないから, Z'_n は Z'_n の 真部分集合である.

定理 7.27　$Z'_n = \mathfrak{M}(1,\ Z'_n)$

証明 7.24　集合 Z'_n と 1 と異なるどの数も 6.6 より 1 数 m の像 m' であり, $m \leq n$ でなければならない. 従って 7.3 より m は Z_n に含まれなければならない. (そうでないならば, $m > n$ で, 従って 7.12 より $m' > n'$, してみると m' は 7.3 より $Z_{n'}$ に含まれないことになる.)$m \subset Z_n$ から, $m' \subset Z'_n$ であり, 確かに $Z'_n \subset \mathfrak{M}(Z'_n,\ 1)$, ところが逆に 7.16 より $1 \subset Z_n$ だから, 7.26 より $Z'_n \subset Z_{n'}$ で, 1.5 より $\mathfrak{M}(1,\ Z'_n)$ ゆえに 1.2 より求める定理を得る.

定義 7.4　もし数の集合 $\mathbb{E}$ のうちに $\mathbb{E}$ に含まれるほかのどの数よりも大きい要素 g が存在すれば, g を集合 $\mathbb{E}$ の「最大数」と呼び, 7.9 より $\mathbb{E}$ のうちにこのような最大数は 1 つしかないことは明らかである. 集合がただ 1 つの数からなるとき, この数自身は集合の最大数である.

定理 7.28　7.3 より n は集合 Z_n の最大数である.

定理 7.29　$\mathbb{E}$ のうちに最大数 g が存在すれば, $\mathbb{E} \subset Z_g$ である.

証明 7.25　$\mathbb{E}$ に含まれる数はどれも $\leq g$ で, 7.3 より Z_g に含まれる.

定理 7.30　$\mathbb{E}$ が集合 Z_n の部分集合ならば, $\mathbb{E}$ に含まれるあらゆる数 $\leq n$ なる 1 数 n が存在すれば, $\mathbb{E}$ は最大数 g を有する.

証明 7.26　条件 $\mathbb{E} \subset Z_p$ を満足するあらゆる数 p の集合は連鎖である. というのは, 7.24 と 1.3 より $\mathbb{E} \subset Z_{p'}$ がでてくるから, 従って 7.7 より $= g_0$ である. ここに g はこれらの数の最大数を意味する. これからまた $\mathbb{E} \subset Z_g$ なので, 従って 7.3 より $\mathbb{E}$ に含まれるどの数も $\leq g$ で, 後は数 g 自身が $\mathbb{E}$ に含まれていることを示せばよい. このことは, もし $g = 1$ ならば, 明らかである. しかし, g が 1 と相異なるならば, 6.6 より g は 1 数 f の像 f' である. そうすると, 7.25 より $\mathbb{E} \subset Z_f$ でなければならない. 従って数 p のうちには 1 数 f で 7.10 より $< g$ なるものが存在することになる. しかしこれは上述と矛盾するため, g は $\mathbb{E}$ に含まれる.

定義 7.5　$l < m$ で $m < n$ ならば数 m は l と n の「間にある」という.

定理 7.31　n と n' の間には数がない.

証明 7.27　$m < n'$ でありさえすれば, 7.11 より $m \leq n$ である. 従って 7.9 より $n < m$ ではありえない.

定理 7.32　t は T のうちの 1 数であるが, 最小数でなければ, T のうちにただ 1 つの「より小さい次の」数 s が存在する. すなわち 1 数 s で $s < t$ で, T のうちに s と t の間にある数は存在しないような s が存在する. 同様に, もし例えば t が T のうちの最大数でなければ, T のうちのいつでもただ 1 つの「より大きい次の」数 u が存在する. すなわち, 1 数 u で $t < u$ で T のうちに t と u との間にある数は存在しないような u が存在する. 同時に t は T 農地で s より大きいい次の数である.

証明 7.28　もし t が T のうちの最小数でなければ, T の次の数で $< t$ なるあらゆる数の集合を $\mathbb{E}$ とする. そうすると, 7.3 より $\mathbb{E} \subset Z_t$ で, 従って $\mathbb{E}$ のうちに最大数 s が存在する. これは明らかに定理に示した性質を有している. このようなただ 1 つの数である. もし, さらに t が T のうちの最大数でなければ, 7.14 より T のあらゆる数のうちには, $> t$ であり, しかも最小であるような数 u がある. これもまた定理に示した性質を有しているただ 1 つの数である.

定理 7.33　N においては n' は n より大きい次の数であり, n は n' より小さい次の数である.

証明 7.29　7.31, 7.32 より明らか.

8　数系列の有限部分集合と無限部分集合

定理 8.1　7.3 の集合 Z_n はどれも有限である.

証明 8.1　　ρ　$n = 1$ に対して 5.1, 7.19 より真である.
　σ　Z_n が有限ならば, 7.25, 5.5 からまた $Z_{n'}$ も有限である.

定理 8.2　m と n とが相異なる数ならば, Z_m と Z_n とは相似でない集合である.

証明 8.2　対称性のために, 7.9 より $m < n$ と仮定する. そうすると, Z_m は 7.23 より Z_m の真部分集合であり, Z_n は 8.1 より有限である. 従って 5.1 より Z_m と Z_n とは相似ではない.

定理 8.3　数系列 N の部分集合 $\mathbb{E}$ で最大数を有しているものは, どれも有限である.

証明 8.3　7.29, 8.1, 5.4 より明らか.

定理 8.4　数系列 N の部分集合 U で最大数を有しないものはどれも単純無限である.

証明 8.4　u を U の中の勝手な数とすると, 7.32 より U のうちには u の大きい次の数がただ 1 つだけ存在する. それを $\psi(u)$ と表し, u の像とみなすことにする. これにより余すことなく確定する. 集合 U の写像 ψ は明らかに

$$\alpha \ : \ \psi(U) \subset U$$

なる性質を有している. すなわち U は ψ により自分自身の中への写像をされる. さらに u, v が U のうちの相異なる数とすると, 対称性より 7.9 より $u < v$ と仮定する. そうすると 7.32 より ψ の定義から $\psi(u) \leq v$ で, $v < \psi(u)$ が得られるから, 従って 7.13 より $\psi(u) < \psi(v)$ である. そうすると 7.9 より像 $\psi(u)$, $\psi(v)$ は相異なる. すなわち

$$\delta \ : \ \text{写像 } \psi \text{ は相似である.}$$

さらに u_1 は集合 U の最小数を意味することにすると, U に含まれるどの数 u も $u \geq u_1$ で, 一般に $u < \psi(u)$ だから 7.13 より $u_1 < \psi(u)$. 従って u_1 は 7.9 より $\psi(u)$ と異なる. すなわち

$$\gamma \ : \ U \text{ の要素 } u_1 \text{ は } \psi(U) \text{ のうちには含まれない.}$$

してみると, $\psi(U)$ は U の真部分集合であって, 従って U は 5.1 より無限集合である. 4.3 と記号を一致させて, V で U の任意の部分集合を表し, $\psi_0(U)$ で V の写像 ψ に対応する連鎖を表すと

$$\beta \ : \ U = \psi_0(u_1)$$

であることを示す. このようにどの連鎖 $\psi_0(U)$ もその定義の結果として, U の ψ による自分自身の中への写像の部分集合であるから, $\psi_0(u_1) \subset U$ は自明である. 逆に 4.7 からまず, U に含まれる要素 u_1 が確かに $\psi_0(u_1)$ に含まれていることは明らかである. もし, $\psi_0(u_1)$ に含まれない. U の要素があると仮定すれば, 7.14 により最小数 w が存在しなければならないし, この数は上に述べたことから,

集合 U の最小数 u_1 とは相異なるから, 7.32 により U のうちにはまた w より小さい次の数 v も存在しなければならない. このことから, $w = \psi(v)$ がでてくる. ところがいま, $v < w$ だから, w の定義から, v は確かに $\psi_0(u_1)$ に含まれなければならない. しかし, このことから 4.16 より $\psi(u)$, w も $\psi_0(u_1)$ に含まれなければならないが, これは w の定義に矛盾する. そうすると, $U \subset \psi_0(u_1)$ で, また $U = \psi_0(u_1)$ となる. 以上より $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ から 6.1 より U は ψ により順序付けられた単純無限集合である.

定理 8.5　8.3, 8.4 から数系列 N の任意の部分集合 T は, T の中に最大数があるか, ないかに従って, 有限であるか, 無限であるかである.

9　帰納法による数系列の写像の決定

以下ローマ字の小文字で数を表し, 一般に 6 から 8 までの記号をそのまま使う. ただし, Ω は任意の集合を指すものとし, それの要素は必ずしも N に含まれているとは限らないから.

定理 9.1　集合 Ω の自分自身の中への任意の写像 θ と, そのほかの Ω の 1 つの確定した要素 w が与えられているとすれば, 1 つ 1 つの数 n に 7.9 の数の集合 Z_n に属するただ 1 つの写像 ψ_n が対応して, 次の条件を満足する.

I　$\psi_n(Z_n) \subset \Omega$

II　$\psi_n(1) = \omega$

III　$\psi_n(t') = \theta\psi_n(t),\ t < n$ の場合, ここに記号 $\theta\psi_n$ は 2.2 で与えた意味とする.

証明 9.1　完全帰納法による. すなわち

ρ　定理は $n = 2$ に関して真である. この場合には, 例えば 7.19 により集合 Z_n はただ 1 つの数 1 のみから構成され, 写像 ψ_1 はすでに II により決定し, その結果 I は満足される. III は不要である.

σ　定理は 1 数 n に対して真ならば, これは続く数 $p = n'$ に対しても成立することを示す. まず集合 Z_p には, これに対応する写像 ψ_p が 1 つあって, 1 つに限ることを示す. 現に写像 ψ_p が条件

I'　$\psi_p(Z_p) = \Omega$

II'　$\psi_p(1) = \omega$

III'　$\psi_p(m') = \theta\psi_p(m)\ (m < p)$

を満足すれば, 2.1 より Z_n の写像も含む, $Z_n \subset Z_p$ だからである. この写像が明らかに条件 I, II, III を満足することは ψ_n と同様である. 従って ψ_n とまったく一致する. Z_n に含まれているあらゆる数に対して, 7.3 より $m \leq n$ なるあらゆる数 m に対して

$$\psi_p(m) = \psi_n(m) \quad \cdots \quad (m)$$

でなければならない. このことから, 特殊な場合として

$$\psi_p(n) = \psi_n(n) \quad \cdots \quad (n)$$

がでてくる. ところがさらに p は 7.22, 7.25 により集合 Z_n は含まれないただ 1 つの数である

から, そうして III と (n) とからまた

$$\psi_p(p) = \theta\psi_n(n) \quad \cdots \quad (p)$$

でなければならないから, そうすると上述の断定が正しいことが得られた. すなわち条件 I, II, III を満足する集合 Z_p の写像 ψ_p はただ 1 つだけ与えることができる. というのは, ψ_p は条件 (m) と (p) から余すところなく ψ_n に引き直せるからである. 逆に集合 Z_p の (m) と (p) によって余すところなく確定する写像 ψ_p は条件 I, II, III を満足することを示す. 明らかに I は (m) と (p) から I と $\theta(\Omega) \subset \Omega$ を考慮して得られる. 同様に II は (m) と II から得られる. というのは数 1 は 7.16 より Z_n に含まれていないからである. III の成立することはまず $m < n$ なる数 m に対しては (m) と III から, 残っているただ 1 つの数 $m = n$ に対しては (p) と (n) とから得られる. 以上より求める定理が数 n に対して成立することから, いつでも次の数 p に対しても成立することが結論できるためのすべてが余すところなく行われた.

定理 9.2 集合 Ω の自分自身の中への任意の写像 θ と, そのほかに Ω の確定して 1 要素 ω が与えられていれば, 数系列 N の写像 ψ で, 条件

I $\psi(N) \subset \Omega$
II $\psi(1) = \omega$
III $\psi(n') = \theta\psi(n)$

を満足するものが存在し, 1 つに限る.

証明 9.2 このような写像 ψ が存在するならば, このうちに 2.1 より集合 Z_n の写像 ψ_n もまた含まれているし, これは 9.1 に与えれた条件 I, II, III を満足するから,

$$\psi(n) = \psi_n(n)$$

でなければならない. このような写像 ψ_n はいつでも 1 つだけ存在するかである. これにより ψ は余すところなく確定するから, このような写像 ψ がただ 1 つだけ与えられる. 逆に (n) により確定する写像 ψ がまた条件 I, II, III を満足することは, (n) から 9.1 で証明された性質 I, II と (p) とを考慮すれば, 容易に出せる.

定理 9.3 前の仮定から $\psi(T') = \theta\psi(T)$. ここに T は数系列 N の任意の部分集合を表すものとする.

証明 9.3 もし t が集合 T のどの数でも表すとすれば, $\psi(T')$ はあらゆる要素 $\psi(t')$ から構成され, $\theta\psi(T)$ はあらゆる要素 $\theta\psi(t)$ から構成される. このことから求める定理を得る.

定理 9.4 同じ仮定をそのまま用いて, θ_0 で集合 Ω の自分自身の中への写像 $theta$ に対応する連鎖で表せば,

$$\psi(N) = \theta_0(\omega)$$

証明 9.4 完全帰納法より

$$\psi(N) \subset \theta_0(\omega)$$

すなわちどの像 $\psi(n)$ もまた $\theta_0(\omega)$ の要素であることを示す.

ρ　この定理は $n = 1$ に対して真である. というのは, 9.2Ⅲ より $\psi(1) \subset \omega$ であり, 4.7 より $\omega \subset \theta_0(\omega)$

σ　1 数 n に対して真ならば, 従って $\psi(N) \subset \theta_0(\omega)$ だから, 4.16 よりまた $\theta(\psi(n)) \subset \theta_0(\omega)$, すなわち, 9.2Ⅲ より $\psi(n') \subset \theta_o(\omega)$. 従って次の数 n' に対しても成立する.

定理 9.5　同じ仮定より一般に

$$\psi(n_0) = \theta(\psi(n))$$

証明 9.5　完全帰納法より

ρ　9.4 の結果より $n = 1$ に対して成立する. というのは, $1_0 = N$ で, $\psi(1) = \omega$ だからである.

σ　1 数 n に対して真ならば,

$$\theta(\psi(n_0) = \theta(\theta_0(\psi(n)))$$

が得られ, 9.3, 6.3 より

$$\theta(\psi(n_0)) = \psi(n')$$

だから, 4.18, 9.2Ⅲ より

$$\theta(\theta_0(\psi(n))) = \theta_0(\theta(\psi(n))) = \theta_0(\psi(n'))$$

である. そうすると, その結果

$$\psi(n'_0) = \theta_0(\psi(n'))$$

すなわち, n の次の数に対しても成立する.

10　単純無限集合の類

定理 10.1　あらゆる単純無限集合は数系列 N と相似であり, 従っ相互に相似である.

証明 10.1　単純無限集合 Ω が写像 θ で順序付けられているものとし, このとき Ω の基礎要素として登場するのが ω とする. θ_0 でまた写像 θ に対応する連鎖を表す. そうすると 6.1 より次が成立する.

α　$\theta(\Omega) \subset \Omega$

β　$\Omega = \theta_0(\omega)$

γ　ω は $\theta(\Omega)$ に含まれない.

δ　θ は相似写像である.

ψ を 9.2 で定義した数系列 N の写像とすると, β と 9.4 から

$$\psi(N) = \Omega$$

これから 3.2 より ψ が相似写像であることを, すなわち相異なる数 $m,\ n$ にはまた相異なる像 $\psi(m),\ \psi(n)$ が対応することを示せばよい. 対称性より 7.9 により $m > n$ と仮定する. 従って $m \subset n'_0$. そうすると, 証明すべき定理は, これから $\psi(n)$ が $\psi(n'_0)$ に含まれないこと, 従って $\theta\psi(n_0)$ に含まれないことからでてくる. このことを 1 つ 1 つの数 n に対して完全帰納法で証明する.

- ρ　γ により $n=1$ にたいして成立する. というのは, $\psi(1)=\omega$ で $\psi(1_0)=\psi(N)=\Omega$ であるから.
- σ　1 数 n に対して真ならば, これに続く数 n' に対しても成立する. $\psi(n')$ すなわち $\theta\psi(n)$ が $\theta\psi(n_0')$ に含まれるとすれば, δ と 3.1 から $\psi(n)$ は $\psi(n')$ に含まれなければならない. よって矛盾する.

定理 10.2　1 つの単純無限集合に相似な数系列に相似な集合はどんな集合でも単純無限集合である.

証明 10.2　Ω が数系列 N に相似な集合とすると, 3.2 より N の相似写像 ψ で

I　$\psi(N)=\Omega$

になるものが存在する. そうすると

II　$\psi(1)=\omega$

とおく. 3.1 より $\overline{\psi}$ で逆の Ω の相似写像を表すと, Ω の 1 つ 1 つの要素 ν に確定した 1 数 $\overline{\psi}(\nu)=n$, すなわちその像が $\psi(n)=\nu$ になるような数が対応する. この数 n は確定した数 $\psi(n')$ に対応するので, 集合 ν にも同じ集合の確定した要素 $\psi(n')$ が属する. この要素を ν の像として $\theta(\nu)$ で表す. これにより ω のそれ自身の中への写像 θ は余すところなく確定し, ω が θ によって単純無限集合として順序付けられることを, すなわち 8.5 の条件 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ を全部満足すること示す. α は θ の定義から明らかである. 1 つ 1 つの数 n には 1 要素 $\nu=\psi(n)$ が対応し, これに対して $\theta(\nu)=\psi(n')$ になる. そうすると一般的に

III　$\psi(n')=\theta\psi(n)$

で, これから I, II, α より写像 $\theta,\ \psi$ は 9.2 のすべての条件を満たす. β は 9.4 と I から出てくる. 9.3 と I より

$$\psi(N')=\theta\psi(N)=\theta(\Omega)$$

なので, これから II と写像 ψ の相似性から γ が出てくる. そうでない場合 $\psi(1)$ は $\psi(N')$ に含まれ, 従って 3.1 より数 1 は N' に含まれなければならないため, 矛盾する. もし, $\mu,\ \nu$ が Ω の要素で $m,\ n$ がそれに対応する数を表せば, これらの像は $\psi(m)=\mu,\ \psi(n)=\nu$ であるから, $\theta(\mu)=\theta(\nu)$ の仮定から $\psi(m')=\psi(n')$, これから $\psi,\ \varphi$ の相似性より $m'=n',\ m=n$, 従って $\mu=\nu$, これより δ も成立する.

定理 10.3　10.1, 10.3 の結果として, すべての単純無限集合 3.3 の意味における 1 つの類を作っている. 同時に 6.1, 6.2 より数についてのどの定理も写像 φ によって順序付けられた単純無限集合 N の要素 n についてのどの定理も, 要素 n の特殊な性質については無視でき, ただ順序付け φ から生ずるような概念だけを問題としているような, どの定理も, 写像 θ によって順序付けられたほかの単純無限集合 Ω と, それの要素 ν とに対してもまた一般的に成立する. および N から Ω への移行は, 10.1, 10.2 から, 写像 ψ により生ずること, これらのことはいずれも明らかである. この要素 ν は Ω の n 番目の要素と名付けることができ, これにより数 n 自身は数系列 N の n 番目の数である. 1 つ 1 つの要素 n に確定した要素 $\varphi(n)=n'$ が続く限り, 領域 N における法則に対して写像 $\nu=\varphi(n)$ に n' の転換によって生じた要素 $\theta(\nu)=\psi(n')$ が続く限り, 領域 Ω における同じ法則に対して ψ

によって作用された写像の転換 θ にも認められる. よって φ は ψ によって θ に転換され, 記号で $\theta = \psi\varphi\overline{\psi},\ \varphi = \overline{\psi}\theta\psi$ で表現される.

11 数の加法

定義 11.1 定理 9.2 で述べた数系列 N の写像 ψ の定義, またはこれによって確定した「関数」$\psi(n)$ を, この集合が数系列 N 自身であるという場合に適応しようとすることが問題となる. この集合 Ω に対しては Ω のそれ自身の中への写像 θ がすでに考慮され, 写像 φ で, これによって N は単純無限集合に順序付けられている. そうすると, $\Omega = N$, $\theta(n) = \varphi(n) = n'$ で

I $\psi(N) \subset N$

となる. 次に $^{O}mega$ から要素 ω を, すなわち N から ω を勝手に選び出すことを示す.
$\omega = 1$ と仮定すると, ψ は明らかに N の合同写像となる. ($\because$ 条件 $\psi(1) = 1,\ \psi(n') = (\psi(n))'$ は一般に $\psi(n) = n$ により満足される.)
もしほかに N の写像 ψ が生成されるものとすれば, ω に対して 1 と相異なる数, 6.6 より N' に含まれる数 m' を選ばなければならない. m 自身を任意の数とすると, 写像 ψ は明らかにこの数 m の選び方に依存しているため, 任意の数 n に対応する像 $\psi(n)$ を記号 $m + n$ で表し, この数を, 数 m に数 n を「加える」ことによって生じた「和」または, $m,\ n$ の和と名付ける. この「加法」は, 9.2 より次の条件で余すところなく確定する.

II $m + 1 = m'$
III $m + n' = (m + n)'$

定理 11.1 $m' + n = m + n'$

証明 11.1 ρ $n = 1$ に対しては真である. なぜなら 11.1Ⅱ より

$$m' + 1 = (m')' = m + 1'$$

と 11.1Ⅲ より

$$(m + 1)' = m + 1'$$

であるから.

σ n に対して真ならば, 次の数 $n' = p$ とおけば, $m' + n = m + p$, 従ってまた $(m' + n)' = (m + p)'$ で 11.1Ⅲ より $m' + p = m + p'$ となる.

定理 11.2 $m' + n = (m + n)'$

証明 11.2 11.1 と 11.1Ⅲ より明らか.

定理 11.3 $1 + n = n'$

証明 11.3 ρ 11.1Ⅲ より $n = 1$ より真である.
σ n に対して成立するとき, $n' = p$ とおけば,

$$1 + n = p$$

従ってまた $(1+n)' = p$ で, 11.1Ⅲ より

$$1 + p = p'$$

であるため, 次の数 p に対しても真である.

定理 11.4 $1 + n = n + 1$

証明 11.4 11.3, 11.1Ⅲ より明らか.

定理 11.5 $m + n = n + m$

証明 11.5 ρ 11.4 より $n = 1$ に対して真である.

σ n に対して成立するならば, $(m+n)' = (n+m)'$ であるので 11.1Ⅲ より $m + n' = n + m'$, 11.1 より $m + n' = n' + m$, ゆえに次の数 n' に対しても成立する.

定理 11.6 $(l + m) + n = l + (m + n)$

証明 11.6 ρ $n = 1$ に対しては 11.1, I, Ⅱ, Ⅲ より

$$\begin{aligned}(l+m)+1 &= (l+m)' \\ &= l + m' \\ &= l + (m+1)\end{aligned}$$

より成立する. よって真である.

σ n に対して成立すれば,

$$((l+m)+n)' = (l+(m+n))'$$

で, 11.1Ⅲ より

$$\begin{aligned}(l+m)+n' &= l + (m+n)' \\ &= l + (m+n')\end{aligned}$$

となり, 次の数 n' に対しても成立する.

定理 11.7 $m + n > n$

証明 11.7 ρ 11.1Ⅱ と 7.10 より $n = 1$ に対して真である.

σ n に対して成立すれば, 11.1Ⅲ, 7.10 より

$$m + n' = (m+n)' > m + n$$

となり, 7.13 より n' に対しても成立する.

定理 11.8 条件 $m > a$ と $m + n > a + n$ は同値である.

証明 11.8 ρ 11.1Ⅱ と 7.12 より $n = 1$ に対して成立する.

σ n に対して成立すれば, 条件は 7.12 より

$$(m+n)' > (a+n)'$$

と同値で, 11.1Ⅲ より

$$m+n' > a+n'$$

依同値なので, 次の数 n' に対しても成立する.

定理 11.9　仮定より 11.8 から

$$m+n > a+n,\ n+a > b+a$$

11.5 より $a+n > a+b$ なので 7.13 より $m+n > a+b$

定理 11.10　$m+n = a+n$ ならば $m+a$ である.

証明 11.9　$m = a$ でなければ, 7.9 より $m > a$ または $m < a$ である. そうすると 11.8 より $m+n > a+n$ なので, $m+n = a+n$ とならない.

定理 11.11　$l > n$ ならば 1 つの数 m で条件 $m+n = l$ を満足するこの m はただ 1 つに限る.

証明 11.10　ρ　$n = 1$ に対して, もし $l > 1$ とすれば, すなわち l が N' に含まれているとすれば, 1 数 m の像 m' であるから, 11.1Ⅱ より $l = m+1$ が得られる.

σ　n に対して成立すれば, 次の数 n' についても成立することを示す. もし $l > n'$ ならば, 7.10, 7.13 より $l > n$ で条件 $l = k+n$ を満足する数 k が存在する. この k は 11.3 より 1 と相異なるので, 6.6 より 1 数 m の像 m' であり, $l = m'+n$, ゆえに 11.1 より $l = m+n'$ である.

12　$1+1=?$

さてここからは今回の主題について考察しようと思う. 単純無限集合 N において, これらの数は順序付けられているため, $1+n = n'$(11.3) であるから, もし $n = 1$ のときこの n' を $\mathbf{2}$ とするならば,

$$1+1=2$$

という等式が成り立ち, 題意が証明されることとなる. また, 幼少のころに $1+1$ の答えが「田んぼの田」といった言葉遊びをしたことがあるかと思われるが, もしこの単純無限集合 N において, 基礎要素 1 に続く数を「田」とすれば,

$$1+1=\text{田}$$

といった一見馬鹿げた回答も正解とみなすことができる. しかしわれわれはこのような回答を正解とすることに抵抗を持つ. というのは古代より数, もとい数系列は $1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ というものとされており, われわれが幼少のころから慣れ親しんでいるからである. そのため, 数が $1,\ \text{田},\ 3,\ \cdots$ というような順序で数をされても理解に苦しむことになるだろう. すなわち, 数というものは人間の相互認識に依存しているものであり, 形は変われど古代から受け継いできたものであろう.

13　今後の課題

これまでの過程より, 常識と思われるようなものを厳密に証明することは大変な労力と, 相当な理解が必要となることをこの身で実感できた. 哲学的な内容にしばしば陥り, 道に迷うことが多かった

が, 断片的にでも理解できた. 今後はデデキント, ペアノの両者の算術に関する論理の違いや, 数学史についても興味を持ったので少し沼にはまってみようかと思う.

参考文献

[1] デーデキント著, 河野伊三郎訳, 数について-連続性と数の本質-, 岩波文庫, 2017 年
[2] 足立恒雄著, 数とは何か, 共立出版, 2011 年