グリーン関数

芝浦工業大学　数理科学研究会
BV18015 大岡舜明

2019 年 11 月 01 日

目次

1　研究背景

境界面を調べていると, ある微分方程式について, 境界条件を設定した下で解くという問題と出会った. その中の斬新な手法に惹かれたのでこの場で紹介をしたい.

2　準備として

2.1　扱う常微分方程式について

まず, 次の区間 $[a,b]$ で定義された 2 階線形非同次微分方程式：

$$p(t)\frac{d^2u(t)}{dt^2}+k(t)\frac{du(t)}{dt}+q(t)u(t)=f(t) \tag{1.1}$$

を考えよう. ただし $p(t)>0$ であり, さらに $p(t),q(t),k(t)$ は区間 $[a,b]$ で連続かつ微分可能とする. ここで微分作用素 F を

$$F\equiv p(t)\frac{d^2}{dt^2}+k(t)\frac{d}{dt}+q(t) \tag{1.2}$$

と置くと, 式 (1.1) は $F[u(t)]=f(t)$ と置き換えられる.

2.2　微分方程式を自己随伴形へ

今回のグリーン関数の話は (1.1) の式を中心に扱うのだが, その式とは別に, 一般の 2 階線形同次の微分方程式:

$$u''+c(t)u'+d(t)u=0$$

をここ 2.2 項では考える. なお, 関数 c,d は区間 $[a,b]$ で定義されており連続, u は t に関する関数である. $'$ は t に関する微分を表すとする. ここで $e^{\int c(t)dt}=p(t), d(t)p(t)=q(t)$ と置くと, $p(t)>0$ であり,

$$(p(t)u')'+q(t)u=0 \tag{0}$$

となる. つまり, 上の条件下で任意の 2 階の微分方程式は (0) 式の形に置き換えられ, この形を自己随伴形と呼ぶ.

2.3　F がエルミート演算子になる条件

なぜ, わざわざ方程式を自己随伴形に変える必要があるかというと, 自己随伴演算子を L として, L で既述される微分方程式は便利で重要な性質がある. そこで随伴演算子（エルミート演算子）L が未知関数 $u(t)$ に作用する条件を考えていくと, 上の自己随伴形が必要になるということである. では F が L になるための条件は何か. もう少し探ってみよう.

今, 区間 $[a,b]$ で定義された t の関数 $u(t)$ が L_2 に属するとする (L_2 空間は自乗可積分関数の集合). F は

$$F[u(t)]=p(t)\frac{d^2u(t)}{dt^2}+k(t)\frac{du(t)}{dt}+q(t)u(t) \tag{1.3}$$

を満たす微分形式であるが, 次の関係を満たす微分形式 H を考えよう.

$$\langle F[u(t)], \phi(t)\rangle = \langle u(t), H[\phi(t)]\rangle \tag{1.4}$$

ただし, $\phi(t) \in L_2$ であり, $\langle , \rangle$ は内積を意味する記号である. 関数空間でも関数を無限次元のベクトルと考えてその内積を, $\langle , \rangle$ の形で次のように書くことに注意する:

$$\langle f(t), g(t)\rangle \equiv \int_a^b f(t)g(t)dt$$

式 (1.4) はエルミート演算子の満たす性質で, また H は具体的に ((1.4) の左辺の積分された項をゼロと置くと)

$$H[v] = \frac{d^2(pv)}{dt^2} - \frac{d(kv)}{dt} + qv \tag{1.5}$$

ここから F, H の関係を調べていこう.

F と H が等しくなる場合, すなわち

$$F[u] = H[u]$$

となるような場合の F は自己随伴作用素[*1]と呼び, 上の式は F はエルミート演算子で H は F のエルミート共役であるということである. さて式 (1.3) と (1.5) の両辺を引くと次の式が得られる：

$$\begin{aligned}
0 &= F[u] - H[u] \\
&= pu'' + ku' + qu - ((pu)'' - (ku)' + qu) \\
&= pu'' + ku' + qu - p'u' - pu'' - p''u - p'u' + k'u + ku' - qu \\
&= 2(k - p')u' + (k' - p'')u
\end{aligned}$$

よって, $F[u] = H[u]$ が成り立つためには $k = p', k' = p''$ が必要で, 結局求める条件は

$$k = p'$$

となる. つまり $F = L$ は

$$L = p(t)\frac{d^2}{dt^2} + p'(t)\frac{d}{dt} + q(t)$$

を満たすということである.

3　グリーン関数とは何か

3.1　グリーン関数の定義

スツルム・リュービル型常微分方程式：

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{du(t)}{dt}\right) - q(t)u(t) = f(t) \tag{2.1}$$

[*1] 自己随伴作用素は有界作用素であり, 行列でいえば対称行列に対応するものである. 有界作用素では対称ということの一般化が自己随伴となる.

を考えよう. ただし $p(t) > 0$ であり, さらに $p(t), q(t)$ は区間 $[a, b]$ で連続かつ微分可能とする. 一般の 2 階の微分方程式はこのような自己随伴系で書けるのであった. ここで L を

$$L \equiv \frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{d}{dt}\right) - q(t) \tag{2.2}$$

と置くと, 式 (1) は $L[u(t)] = f(t)$ と置き換えられる. また, L の逆作用素 L^{-1} を用いると

$$u(t) = L^{-1}[f(t)]$$

と書ける. このとき $f(t)$ がデルタ関数のとき, L^{-1} をグリーン作用素という. そして, 境界条件

$$B_a \equiv p(a)u'(a)\sin\alpha - u(a)\cos\alpha = 0 \tag{2.3}$$

$$B_b \equiv p(b)u'(b)\sin\beta - u(b)\cos\beta = 0 \tag{2.4}$$

の下で解を求める (a, b, α, β はある定数). これは, 同次または斉次境界条件と呼ばれ, 様々な物理工学上の問題に現れる具体的な条件を表現したものである.

さて式 (2.1) を (2.3),(2.4) の下で解く際に, 直接式 (2.1) のみを扱わないで, 入力 $f(t)$ をインパルス, 即ち次のようにデルタ関数とした次式：

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dG(t,\xi)}{dt}\right) - q(t)G(t,\xi) = \delta(t-\xi) \tag{2.5}$$

を使うとする. (2.5) について (2.2) を用いて書き直すと

$$L[G(t,\xi)] = \delta(t-\xi)$$

両辺に $f(\xi)$ をかけて a から b まで ξ について積分すると

$$\int_a^b L[G(t,\xi)]f(\xi)d\xi = \int_a^b f(\xi)\delta(t-\xi)d\xi$$

上辺右辺は $\delta(t)$ 関数の性質から $f(t)$ となる. 左辺は L が線形作用素であり, それは積分と交換できるので, 結局

$$L\left[\int_a^b G(t,\xi)f(\xi)d\xi\right] = f(t)$$

が得られる. 元の式は $L[u(t)] = f(t)$ であるから, $u(t)$ は

$$u(t) = \int_a^b G(t,\xi)f(\xi)d\xi \tag{2.6}$$

で与えられ, $G(t,\xi)$ は同じ境界条件 $B_a = 0, B_b = 0$ を満たし, かつ

$$L[u] = L[G(t,\xi)] = (pG')' - qG = \delta(t-\xi)$$

を満足する.
このとき, 次の性質を持つ $G(t,\xi)$ を方程式 $L[u] = f$ の境界条件 $B_a = 0,\ B_b = 0$ の下におけるグリーン関数と定義する.

性質

1. 区間 $[a,b]$ で G は連続である：$G(t-0,t)=G(t+0,t)$
2. $t\neq\xi$ のとき, 次式を満たす：$(pG')'-qG=0, B_a=0, B_b=0$
3. t に関する導関数が $t=\xi$ で $\dfrac{1}{p}$ の跳びを持つ. すなわち $G'(t+0,t)-G'(t-0,t)=\dfrac{1}{p(t)}$

このような関数 $G(t,\xi)$ を求められれば, 式 (2.6) に代入して求めたい解 $u(t)$ がわかる.

3.2　グリーン関数の対称性

グリーン関数には対称性という性質があり,

$$G(t,\xi)=G(\xi,t)$$

を満たす. この性質を示すため, 4.1 節の準備をしながら求める. 次の微分方程式:

$$(pu')'+qu=f \tag{2.7}$$

の境界条件 $B_a=0, B_b=0$ に対するグリーン関数を具体的に求めていく. 今, 次の同次微分方程式:

$$(pU')'+qU=0 \tag{2.8}$$

を考える. これは 2 階線形微分方程式なので, 2 つの独立な解, すなわち基本解 U_1, U_2 が存在する. K_1, K_2 を定数とすると一般解は

$$U(t)=K_1U_1(t)+K_2U_2(t)$$

となる. ここで, $U_1(t)$ で $B_a=0$ を満足するものを $U_a(t)$ とし, $U_2(t)$ で $B_b=0$ を満足するものを $U_b(t)$ とする.

注釈

このような $U_a(t), U_b(t)$ が存在しない場合, すなわち式 (2.8) と $B_a=0, B_b=0$ を同時に満たす解 $U_0(t)$ がある場合については後で論ずる.

このとき

$$G(t,\xi)=\begin{cases}A(\xi)U_a(t) & (a\leqq t<\xi)\\ B(\xi)U_b(t) & (\xi<t\leqq b)\end{cases} \tag{2.9}$$

となる関数を考える.
この関数は $U_a(t), U_b(t)$ が式 (2.8) の解なので, 明らかに上の性質 1 を満たす. 従って,

$$(pG')'+qG=0$$

また, $B_a=0, B_b=0$ を満たすことも仮定から自明. 式 (2.9) の $A(\xi), B(\xi)$ が残りの性質 2,3 を満たすように決定できると所望のグリーン関数が得られる. まず, 性質 2 より $t=\xi$ で $G(t,\xi)$ は連続でなければいけないので

$$A(\xi)U_a(t)=B(\xi)U_b(t) \tag{2.10}$$

さらに性質 3 より

$$G'(\xi+0,\xi)-G'(\xi-0,\xi)=\frac{1}{p(\xi)}$$

となる必要がある. 式 (2.9) より上の条件は

$$B(\xi)U_b'(t) - A(\xi)U_a'(t) = \frac{1}{p(\xi)} \tag{2.11}$$

となり, これを式 (2.10),(2.11) で連立させて解く. 結果

$$A(\xi) = \frac{U_b\xi)}{p(\xi)(U_a(\xi)U_b'(t) - U_b(\xi)U_a'(t))} = \frac{U_b(\xi)}{p(\xi)\Delta(\xi)} \tag{2.12}$$

$$B(\xi) = \frac{U_a\xi)}{p(\xi)(U_a(\xi)U_b'(t) - U_b(\xi)U_a'(t))} = \frac{U_a(\xi)}{p(\xi)\Delta(\xi)} \tag{2.13}$$

が得られる. ただし, $\Delta(\xi)$ はロンスキー行列とする. $U_a(\xi), U_b(\xi)$ が独立であるので $\Delta(\xi) \neq 0$. 以上でグリーン関数が求まったがもう少し計算しよう. U_a, U_b は式 (2.8) の解なので

$$(pU_a')' + qU_a' = 0 \tag{2.14}$$

$$(pU_b')' + qU_b' = 0 \tag{2.15}$$

を満足する. 式 (2,14) に U_b をかけ, 式 (2.15) に U_a をかけて辺々をそれぞれ引くと

$$U_a(pU_b')' - U_b(qU_a')' = 0$$

となるが, 上式左辺は

$$\frac{d}{dt}\left(p(U_b'U_a - U_a'U_b)\right)$$

と書けるので上式はゼロであることになる. 従って, () の中は定数でなければならないので

$$p(U_b'U_a - U_a'U_b) = p(t)\Delta(t) = \text{定数}$$

よって,

$$p(t)\Delta(t) = p(\xi)\Delta(\xi) = \text{定数} = p(0)\Delta(0)$$

と書いてよい. ゆえに式 (2.12),(2.13) は

$$A(\xi) = \frac{U_b(\xi)}{p(0)\Delta(0)} \tag{2.16}$$

$$B(\xi) = \frac{U_a(\xi)}{p(0)\Delta(0)} \tag{2.17}$$

となる. 式 (2.9) に式 (2.16),(2.17) を代入すれば求めるグリーン関数は

$$G(t,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{p(0)\Delta(0)}U_b(\xi)U_a(t) & (a \leqq t < \xi) \\ \dfrac{1}{p(0)\Delta(0)}U_a(\xi)U_b(t) & (\xi < t \leqq b) \end{cases} \tag{2.18}$$

と与えられる. 上式では ξ と t を入れ替えても変わらないので, 明らかに

$$G(t,\xi) = G(\xi,t)$$

が成り立つ.

上の解法は $L[u] = 0, B_a = 0, B_b = 0$ の解が 0 のみの場合であった. では $L[u_0] = 0, B_a(u_0) = 0, B_b(u_0) = 0$ を同時に満たす解 $u_(0)$ が存在するときはどうなるかというと, 実は先の求めた $G(t,\xi)$ は存在しないことになる. なぜなら, このとき U_a, U_b が等しいことになり, ロンスキー行列 $\Delta(\xi) = 0$ となってしまう. よって式 (2.12),(2.13) の A, B が定まらないためである.

4　グリーン関数を具体的に求める

4.1　基本解を用いる方法

例. 区間 $[0,l]$ で定義された次の微分方程式

$$\frac{d^2u}{dt^2}=f(t) \tag{3.1}$$

の境界条件

$$u(0)=u(l)=0 \tag{3.2}$$

に対する解をグリーン関数法で求める.

式 (2.7) で $p=1, q=0, a=0, b=l$ とする. まず式 (2.8) に従い式 (3.1) の右辺がゼロのときの式:

$$\frac{d^2u}{dt^2}=0 \tag{3.3}$$

を解く. この解は簡単で次のように得られる.

$$u(t)=k_1t+k_2(k_1,k_2\text{は定数})$$

次に境界条件の一方 $u(0)=0$ を満足するのは

$$u_a(t)=k_1t$$

他方の $u(l)=0$ を満たすものとして

$$u_b(t)=k_1(t-l)$$

が得られる. 式 (2.9) に従って求める $G(t,\xi)$ を

$$G(t,\xi)=\begin{cases}A(\xi)u_a(t) & (0\leqq t<\xi)\\ B(\xi)u_b(t) & (\xi<t\leqq l)\end{cases}$$

と置く. 式 (2.16),(2.17) を用いて $A(\xi),B(\xi)$ を決定すると

$$A(\xi)=\frac{u_b(\xi)}{p(0)\Delta(0)}=\frac{k_1(\xi-l)}{k_1^2l}=\frac{\xi-l}{k_1l}B(\xi)=\frac{u_a(\xi)}{p(0)\Delta(0)}=\frac{k_1\xi}{k_1^2l}=\frac{\xi}{k_1l}$$

となる. 求めるグリーン関数は

$$G(t,\xi)=\begin{cases}\dfrac{t(\xi-l)}{l} & (0\leqq t<\xi)\\ \dfrac{\xi(t-l)}{l} & (\xi<t\leqq l)\end{cases} \tag{3.4}$$

となる. 従って, 求める解は式 (2.6) より

$$u(t)=\int_a^b G(t,\xi)f(\xi)d\xi=\int_0^t\frac{\xi(t-l)}{l}f(\xi)d\xi+\int_t^l\frac{t(\xi-l)}{l}f(\xi)d\xi$$

となる.

4.2 固有関数展開を用いる方法

まずデルタ関数は固有関数系を用いて次のように展開できることに注意する

$$\delta(t-\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(t) u_m(\xi) \tag{3.5}$$

これは次のように導くことができる.
L_2 空間内の任意の関数 $u(t)$ は u_m でフーリエ級数展開ができる.

$$u(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m u_m(t)$$

ただし

$$a_m = \int_a^b u(\xi) u_m(\xi) d\xi$$

である. ゆえに

$$u(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_a^b u(\xi) u_m(\xi) u_m(t) d\xi = \int_a^b \left(\sum_{m=0}^{\infty} u_m(\xi) u_m(t) \right) u(\xi) d\xi$$

となる. 一方

$$u(t) = \int_a^b \delta(t-\xi) u(\xi) d\xi$$

と書くことができるので, 式 (3.5) は明らかである.

例. 固有関数展開法によって

$$\frac{d^2G}{dt^2} + k^2 G = \delta(t-\xi) \quad (k>0) \tag{3.6}$$

$$G(0,\xi) = G(a,\xi) = 0 \tag{3.7}$$

を満たすグリーン関数 $G(t,\xi)$ を求める.

まず

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k^2 u = 0 \tag{3.8}$$

$$u(0) = u(a) = 0 \tag{3.9}$$

の固有値と固有関数を求める.

固有値, 固有関数について

固有値と固有関数とは何か, ここでは説明していなかったが, グリーン関数を解く上で元になるスツルム・リュービル型の微分方程式の性質や特性が時に重要になる. その一つに固有値問題があり,

$$L[u(t)] = -\lambda r(t)u(t) \tag{3.10}$$

と書き表される. この $r(t)$ は連続実関数で $r(t) > 0$ であり荷重関数と呼ばれる. この式 (3.10) の意味は, 関数空間 $u(t)$ に L を作用させた結果が, 再びその同じ関数の $-\lambda$ 倍 (荷重関数としての $r(t)$ がかけてある) になることを示している. すなわち, 式 (3.10) は各 λ に対して $u_i(t)$ が対応し

$$L[u_i(t)] = -\lambda r_i(t)u_i(t) \quad (i = 1, 2, \cdots, \infty) \tag{3.11}$$

と書けるが, このとき λ_i は一般には可算無限個現れる. それぞれの λ_i を L の固有値といい, $u_i(t)$ をそれに対する固有関数という. また u_i は完全正規直行関数系を成す (証明は略).
さて, スツルム・リュービル問題

$$L[u] + \lambda r(t)u(t) \tag{3.12}$$

を斉次境界条件

$$B_a \equiv p(a)u'(a)\sin\alpha - u(a)\cos\alpha = 0 \tag{2.3}$$

$$B_b \equiv p(b)u'(b)\sin\beta - u(b)\cos\beta = 0 \tag{2.4}$$

の下で解く. このとき次の非同次方程式:

$$L[u] + kr(t)u(t) = f(t) \tag{3.13}$$

を同次境界条件 $B_a = 0, B_b = 0$ で解くことを考える. 式 (3.2) の各固有値 $\lambda_m(m = 0, 1, 2, \cdots$ とそれに対応する固有関数 u_m について

$$B_a(u_m) = 0, B_b(u_m) = 0$$

$$L[u_m] + \lambda_m r(t)u_m(t) = 0$$

が成り立つことは容易にわかるが, 次の等式が成り立つことが知られている (証明は略).

$$G(t,\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{k-\lambda_m} u_m(t)u_m(\xi) \tag{3.14}$$

このように固有値, 固有関数を求められると, それを使ってグリーン関数もあらわせることに注意する.

さて, 式 (3.8) の解は A, B を定数として次のようになる:

$$u(t) = Ae^{ikt} + Be^{-ikt} = k_1\cos kt + k_2\sin kt \quad (i \text{ は虚数単位})$$

と書ける (k_1, k_2 は定数). 式 (3.9) の $u(0) = 0$ より

$$u(0) = k_1\cos 0 + k_2\sin 0 = 0$$

であるが, これが成立するためには明らかに $k_1 = 0$ でなければいけないので

$$u(t) = k_2\sin k$$

次に, 条件式 (3.9) の $u(a)=0$ より次の結果が得られる：

$$u(a)=k_2\sin ka=0$$

ゆえに

$$ka=n\pi \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

よって k_n(固有値は $-k_n^2$) は

$$k_n=\frac{n\pi}{a}$$

となり固有関数は

$$\sin\frac{n\pi}{a}t$$

と定まる. なお $k_0=0$ は固有値でないので除くとする. 上記の固有関数を正規化すると

$$u_n(t)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}t$$

となる. これによってグリーン関数を展開すると

$$G(t,\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}c_n(\xi)\sin\frac{n\pi t}{a} \tag{3.15}$$

の形になる. 他方で, デルタ関数もこの固有関数で展開でき (式 (3.5)),

$$\delta(t-\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)u_n(\xi)$$

よって求めた固有関数によって

$$\delta(t-\xi)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi t}{a}\sin\frac{n\pi\xi}{a} \tag{3.16}$$

と展開される.

まず式 (3.15) を 2 回微分すると

$$\frac{d^2G}{dt^2}=-\sum_{m=1}^{\infty}c_n(\xi)\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\sin\frac{n\pi t}{a} \tag{3.17}$$

となり, 式 (3.15),(3.16),(3.17) を式 (3.6) に代入すると

$$\sum_{m=1}^{\infty}c_n(\xi)\left(k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right)\sin\frac{n\pi t}{a}=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi t}{a}\sin\frac{n\pi\xi}{a} \tag{3.18}$$

が得られる. 式 (3.18) の両辺の $\sin\dfrac{n\pi t}{a}$ の係数を等置すると

$$c_n(\xi)\left(k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right)\sin\frac{n\pi t}{a}=\frac{2}{a}\sin\frac{n\pi\xi}{a}$$

ゆえに $c_n(\xi)$ は

$$c_n(\xi)=\frac{2\sin\dfrac{n\pi\xi}{a}}{a\left(k^2-\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2\right)}$$

となるので, これを式 (3.15) に代入すると所望のグリーン関数が次のように得られる:

$$G(t,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a} \frac{\sin\dfrac{n\pi t}{a}\sin\dfrac{n\pi\xi}{a}}{k^2 - \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2}$$

従って,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k^2 u = f(t)$$

$$u(0) = u(a) = 0$$

の解は

$$u(t) = \int_0^a G(t,\xi) f(\xi) d\xi = \int_0^a \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a} \frac{\sin\dfrac{n\pi t}{a}\sin\dfrac{n\pi\xi}{a}}{k^2 - \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2} \right) f(\xi) d\xi$$

の形で与えられる.

5　今後の課題

ここまでグリーン関数について説明したが, フーリエ変換を使ったやり方などを具体的な $G(t,\xi)$ を記述しながらより多くの例で説明できたらと思う.

参考文献

[1] 物理・工学のためのグリーン関数入門　松浦武信・吉田正廣・小泉義晴　東海大学出版会 2000 年.

[2] スツルム・リウヴィル理論 19/10/31 http://www.yamamo10.jp/yamamoto/study/electromagnetics/SturmLiouville/index.php

[3] Fun Fun 物理 19/10/31 http://butsuri.fun/1695/

[4] EMAN の物理数学 19/10/31 https://eman-physics.net/math/contents.html