電磁場の解析力学

BV19321　Yuto Toyoshima

2019/11/1

目次

1 復習：解析力学
1.1 汎関数の変分と極値
1.2 Euler 方程式
1.3 Lagrange 方程式と最小作用の原理
1.4 Legendre 変換
1.5 Hamiltonian と正準方程式

2 復習：数ベクトル空間上のテンソル代数
2.1 反変ベクトルと共変ベクトル
2.2 反変テンソルと共変テンソル
2.3 計量テンソル
2.4 テンソルの演算

3 復習：特殊相対性理論
3.1 特殊相対性理論の出来
3.2 波動と 4 元ベクトル
3.3 広義の Lorentz 変換
3.4 相対論的力学
3.5 Maxwell 方程式の Lorentz 共変性
3.6 Minkowski 空間
3.7 Maxwell 方程式のポテンシャル表現
3.8 電磁場テンソル

4 電磁場の解析力学
4.1 一般化ポテンシャル
4.2 荷電粒子の Lagrangian
4.3 Maxwell 方程式と電磁場テンソル
4.4 電磁場の作用

♣ Section 1. 復習：解析力学

◇ 1.1. 汎関数の変分と極値

線形空間 V に対して $v\in V$ のノルム (norm) と呼ばれる以下を満たす $\|v\|$ が存在するとき, V を線形ノルム空間と呼ぶ.[*1]

1) $\|v\|\geq 0$ が成り立ち, $v=0 \Leftrightarrow \|v\|=0$ である.　2) $\|\alpha v\|=\alpha\|v\|$　3) $\|v+w\|\leq\|v\|+\|w\|$　$(\alpha\in K,\ v,w\in V)$

v と w の間の距離を $\|v-w\|$ で定めれば, 線形ノルム空間は距離空間となる.

ここで, 関数を元とする線形ノルム空間を関数空間 (function space) と呼ぶ.[*2]

関数空間 $\mathcal{C}$：関数の絶対値の最大値をノルムとする. すなわち, $\|y\|_0 \equiv \max\limits_{a\leq x\leq b}\|y(x)\|$.

関数空間 $\mathcal{D}_1$：関数のノルムを次のように定める. $\|y\|_1 \equiv \max\limits_{a\leq x\leq b}\|y(x)\| + \max\limits_{a\leq x\leq b}\|y'(x)\|$.

関数空間 $\mathcal{D}_n$：関数のノルムを次のように定める. $\|y\|_n \equiv \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\max_{a\leq x\leq b}\|y^{(k)}(x)\|$.

始域が関数空間である写像を汎関数 (functional) と呼び, 連続かつ線形である汎関数を (連続な) 線形汎関数と呼ぶ.
したがってある汎関数に対して極限操作などを扱うためには, それに応じて適当な関数空間を選べばよい.
(たとえば, $J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx$ であるならば関数空間 $\mathcal{D}_1$.)

ここで, 一般に汎関数 $J[y]$ に対して $\Delta J[h]\equiv J[y+h]-J[y]$ は許容関数 $h(x)$ の非線形汎関数であり, この主線形項 (すなわち, $\Delta J[h]$ と $\|h\|$ に関して高々 1 次の無限小しか離れていない線形汎関数)$\delta J[h]$ を $J[h]$ の変分 (variation) と呼ぶ.[*3]
汎関数の変分は一意である.

まず, $\delta J[h]$ が線形汎関数であることから, $\displaystyle\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\delta J[h]}{\|h\|}=0$ ならば, $\delta J[h]=0$ となる.
実際, ある $h_0\neq 0$ に対して $\delta J[h_0]\neq 0$ であるならば, $h_n\equiv\dfrac{h_0}{n}$, $\dfrac{\delta J[h_0]}{\|h_0\|}\equiv\lambda$ とおけば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\delta J[h_n]}{\|h_n\|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\delta J[h_0]}{n}\cdot\frac{n}{\|h_0\|}\right)=\lambda\neq 0$ となり, 対偶が示される.
ここで, $\Delta J[h]$ が以下の 2 通りで表せるものとする.

$\Delta J[h]=\varphi_1[h]+\varepsilon_1\|h\|$, $\Delta J[h]=\varphi_2[h]+\varepsilon_2\|h\|$　(φ_1,φ_2 は $J[h]$ の変分.)

したがって, $\varphi_1[h]-\varphi_2[h]=\varepsilon_2\|h\|-\varepsilon_1\|h\|$ は h に関して高々 1 次の無限小となり, $\varphi_1[h]-\varphi_2[h]$ は線形汎関数であるから, $\|h\|\to 0$ において 0 に収束する.

$J[y]-J[\hat{y}]$ が曲線 $\hat{y}(x)$ の近傍で同符号であるとき, $J[y]$ は $\hat{y}(x)$ で極値をとるという.
ただし, 微分可能な関数からなる集合上で定義される汎関数に対して, この始域の関数は $\mathcal{C}$ の元とも $\mathcal{D}_1$ の元とも考えられるから汎関数の極値には以下の 2 種類が存在する.

・$\|y-\hat{y}\|_1<\varepsilon$ を満たす $y\in\mathcal{D}_1$ に対して $J[y]-J[\hat{y}]$ が同符号であるとき, 汎関数 $J[y]$ は $\hat{y}$ で弱極値 (weak extrema) をとるという.
・$\|y-\hat{y}\|_0<\varepsilon$ を満たす $y\in\mathcal{C}$ に対して $J[y]-J[\hat{y}]$ が同符号であるとき, $J[y]$ は $\hat{y}$ で強極値 (strong extrema) をとるという.

ここで, 明らかに強極値点は弱極値点である.
また, 変分法で考察される汎関数は $\mathcal{D}_1$ において連続であることが多いため, 弱極値は強極値より求まりやすい.

ここで, 汎関数 $J[y]$ が $\hat{y}$ で極値をとるための必要条件は, $\hat{y}$ と許容関数 h に対して $\delta J[h]=0$ が成り立つことである.

$J[y]$ が $\hat{y}$ において極小値をとる場合について考える. (極大値をとる場合も同様である.)
このとき, $\|h\|$ が十分に小さいすべての h に対して, $J[\hat{y}+h]-J[\hat{y}]=\delta J[h]+\varepsilon\|h\|\geq 0$ が成り立ち, $\|h\|\to 0$ のとき $\varepsilon\to 0$ であるので, $\delta J[h]\neq 0$ ならば, $\delta J[h]+\varepsilon\|h\|$ は $\delta J[h]$ と同符号となる.
また, $\delta J[h]$ は線形汎関数であるから, $\delta J[-h]=-\delta J[h]$ が成り立つ.
したがって, $\delta J[h]\neq 0$ ならば, $\delta J[h]+\varepsilon\|h\|$ の符号は一意に確定せず (たとえば, $-\delta J\|h\|+\varepsilon\|h\|$ の符号は負になり得る.), このとき極値をとり得ない.

[*1] 内積空間であるなたば内積から定まるノルムが代表的である.

[*2] これらの関数空間の呼び名は, I.M.Gelfand / S.V.Fomin『変分法』にならう.

[*3] すなわち, $\|h\|\to 0$ であるとき $\varepsilon\to 0$ を満たす $\varepsilon>0$ を用いれば $\Delta J[h]=\delta J[h]+\varepsilon\|h\|$ である.

◇ 1.2. Euler 方程式

連続関数 $\alpha(x)$ と $h(a)=h(b)=0$ を満たす $h(x)\in\mathcal{C}$ $(a\leq x\leq b)$ に対して $\int_a^b \alpha(x)h(x)dx=0$ であるならば, $\alpha(x)=0$ が成り立つ.
(変分法の基本補題)

ある点 c で $\alpha(c)\neq 0$, 例えば $\alpha(c)>0$ とする.
このとき, 区間 $[a,b]$ 上に $\alpha(x)>0$ となるような区間 (ξ_1,ξ_2) が存在する. (この区間内に c が含まれる.)
また, $h(x)$ が $h(\xi_1)=h(\xi_2)=0$ を満足するために, $[\xi_1,\xi_2]$ 上では $h(x)=(x-\xi_1)(\xi_2-x)$, $[\xi_1,\xi_2]$ 以外では $h(x)=0$ を満たすものとする.
このとき, 関数はこの区間で連続で正値をとるため, $\int_a^b \alpha(x)h(x)dx=\int_{\xi_1}^{\xi_2}\alpha(x)(x-\xi_1)(\xi_2-x)dx>0$ が成り立ち, 仮定に矛盾する.

また, 以下は微分と変分の交換則と呼ばれる.
微分と変分の交換則 : 関数 $y(x)$ の微小増分を $\delta y(x)$ としたとき, $(\delta y)'=\delta(y')$ が成り立つ.[*4]

$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)=\lim_{x_2\to x_1}\left(\frac{y(x_2)+\delta y(x_2)-y(x_1)-\delta y(x_1)}{x_2-x_1}-\frac{y(x_2)-y(x_1)}{x_2-x_1}\right)=\lim_{x_2\to x_1}\frac{\delta y(x_2)-\delta y(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{d}{dx}\delta y.$

ここで, $\delta y(a)=\delta y(b)=0$ を満たす関数 $y(x)$ の集合上で定義される汎関数 $J[y]\equiv\int_a^b F(x,y,y')dx$ が停留することとこの関数 $y(x)$ が Euler 方程式 $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$ を満たすこととは同値である.

$J[y]$ が弱極値をとるための必要条件を得るために, $J[y]$ の変分を求める.
関数 $y(x)$ に増分 $\delta y(x)$ を与えたとき, 境界条件の仮定より, $\delta y(a)=\delta y(b)=0$ が成り立つ.
このとき $J[y]$ の増分は, $\Delta J=J[y+h]-J[y]=\int_a^b F(x,y+\delta y,y'+\delta y')dx-\int_a^b F(x,y,y')dx=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx+\cdots$ となる.
よって, 微分と変分の交換法則を用いれば $\delta J=0$ より $\delta J=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right)dx+\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_a^b=0$ であるから変分法の基本補題より, $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$ である.

◇ 1.3. Lagrange 方程式と最小作用の原理

解析力学 (analytical mechanics) では運動の 3 法則に代わって, 最小作用の原理を運動の基本原理として採用する. 解析力学の創始者である Lagrange は, 静力学の法則を動力学に拡張することでこの原理を構築した. 本資料では, この方法に沿って作用の停留を演繹する.

まず, 静力学では物体にかかる合力 $\boldsymbol{F}$ が 0 であることから, 仮想変位 $\delta\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{x}=0$ が成り立つ. (仮想仕事の原理)
ここで, Newton 力学によれば動力学では運動方程式 $\boldsymbol{F}-m\ddot{\boldsymbol{x}}=0$ が成り立つから $\boldsymbol{F}$ の反対方向に $m\ddot{\boldsymbol{x}}$ だけ力がかかっているような慣性系をとれば, 動力学を静力学と同様に扱うことができる.[*5]よって, 仮想仕事の原理は以下のように拡張される.

仮想仕事の原理の拡張 : すべての力学に対して $(\boldsymbol{F}-m\ddot{\boldsymbol{x}})\cdot\delta\boldsymbol{x}=0$ が成り立つ.

いま, 物体にかかっている力が保存力であるとすれば $\boldsymbol{F}=-\mathrm{grad}\ U$ が成り立つから仮想仕事の原理はポテンシャルの停留 $\delta U=0$ に帰着される.
ここで, 前述した仮想仕事の原理の拡張式がある物理量 S の停留に帰着されれば, 物体の運動は S が停留するように決まるということができる.[*6]
まず, 多質点系において $\boldsymbol{x_i}$ が一般化座標 q_i の関数で表されるとすれば, 以下のように変形される.[*7]

$$(\boldsymbol{F_i}-m_i\ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}})\cdot\delta\boldsymbol{x_i}=0\quad\Leftrightarrow\quad(\boldsymbol{F_i}-m_i\ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}})\cdot\frac{\partial\boldsymbol{x_i}}{\partial q_k}\delta q_k=0$$

ここで, 変換則 $\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}=\dfrac{\partial\boldsymbol{x_i}}{\partial t}+\dfrac{\partial\boldsymbol{x_i}}{\partial q_k}\dot{q}_k\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}}{\partial\dot{q}_k}=\dfrac{\partial\boldsymbol{x_i}}{\partial q_k},\quad\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{x_i}}{\partial x_i}\right)=\dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{x_i}}{\partial q_j}\dot{q}_j+\dfrac{\partial\boldsymbol{x_i}}{\partial t}\right)=\dfrac{\partial\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}}{\partial q_j}$ より,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F_i}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{x_i}}{\partial q_k}&=-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{x_i}}\frac{\partial\boldsymbol{x_i}}{\partial q_k}=-\frac{\partial U}{\partial q_k}\\
\ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{x_i}}{\partial q_k}&=\frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}\frac{\partial\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}}{\partial\dot{q}_k}\right)-\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}\frac{\partial\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}}{\partial q_k}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}{}^2)}{\partial\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}}\frac{\partial\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}}{\partial\dot{q}_k}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial(\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}{}^2)}{\partial\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}}\frac{\partial\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}}{\partial q_k}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{\partial(\dot{\boldsymbol{x}}_i^2)}{\partial\dot{q}_k}-\frac{1}{2}\frac{\partial(\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}{}^2)}{\partial q_k}
\end{aligned}$$

[*4] プライム記号は x に関する微分操作である.
[*5] この着想を, d'Alembert の原理と呼ぶ.
[*6] 以下では, 普遍的な座標系として一般化座標 (generalized coordinates) を導入する. ここで一般化座標とは, 自由度 N の系において N 個だけ定まる変数であり, 力学変数とも呼ばれる.
[*7] index k は縮約規則に基づいて和をとっている.

であるから $L \equiv T - U$ (T:運動エネルギー, U:ポテンシャル) を用いれば,

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{F_i} - m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x_i}}{\partial q_k}\delta q_k = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{\partial U}{\partial q_k}\delta q_k - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q_k}} - \frac{\partial}{\partial q_k}\right)\frac{1}{2}m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}{}^2 \delta q_k = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q_k}}\right)\left(\frac{1}{2}m_i \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}{}^2 - U\right)\delta q_k = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}}\right)\delta q_k = 0
\end{aligned}$$

の形に帰着され, この両辺を時間積分すれば $\delta S = 0$ の形に帰着する.
よって, 以下が成り立つ.

最小作用の原理 (principle of least action)

2 つの時刻 t_1, t_2 ($t_1 < t_2$) における $q_i (i = 1, 2, \cdots n)$ の値を指定したとき, $t_1 < t < t_2$ における系の運動, すなわち時間の関数 $q_i(t)$ は,
作用 (action) : $S[q] = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)\ dt$
が停留するように決まる.[a]

[a] このときの L は $L \equiv T - U$ で定義され, Lagrangian と呼ばれる.

解析力学では, Newton の 3 法則ではなく最小作用の原理を運動の基本法則として採用する.[*8]
また, 作用の停留に対する Euler 方程式を Lagrange 方程式と呼び, Lagrange 方程式は運動方程式に対応する.
このとき, Lagrangian は座標変換によって (形こそ変わるものの) 不変であり, 得られた Lagrange 方程式は一般化座標の形で書かれているため, Lagrange 方程式は任意の座標変換に対して共変性 (convariance) をもつ.[*9]

◇ 1.4. Legendre 変換

$f(\xi)$ が狭義の凸関数である, すなわち $f''(\xi) > 0$ を満たすものとすれば, 独立変数 ξ を $p \equiv f'(\xi)$ に変換したときに f の独立変数が f に陰に依存するというパラドキシカルな事態が生じる.[*10]
ここで, 変数変換後の f を表す関数として p の関数 $H(p) \equiv p\xi - f(\xi)$ が与えられ, この一連の変換を Lagengre 変換と呼ぶ.
ちなみに条件より $p'(\xi) \neq 0$ が成り立つため接線の勾配によって曲線上の点が一意に定まり, それゆえ ξ が p で表され, $H(p)$ の有効性が示される.
$dH = -f'(\xi)d\xi + pd\xi + \xi dp = \xi dp$, $f''(\xi) > 0$ より $\dfrac{d^2 H}{dp^2} = \dfrac{d\xi}{dp} = \dfrac{1}{f''(\xi)} > 0$ が成り立つから, $H(p)$ も狭義の凸関数である.
また, $\dfrac{dH}{dp} = \xi$, $-H(p) + \xi p = f(\xi)$ より Legendre 変換は対合的であるから正当な変数変換である.

◇ 1.5. Hamiltonian と正準方程式

Lagrangian の変数である一般化速度を一般化運動量に Legendre 変換した $H(q_i, p_i, t) = p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)$ を Hamiltonian と呼び, Hamiltonian はエネルギーと対応する.
ここで, Hamiltonian を用いて作用の変分を計算すれば, 以下のようになる.

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left((p_i + \delta p_i)(\dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) - H(q_i + \delta q_i, p_i + \delta p_i, t) - p_i \dot{q}_i + H(q_i, p_i t)\right) dt \\
&\simeq \int_{t_1}^{t_2} \left((p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i) - \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right)\right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta q_i \left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \delta p_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\right) dt + [p_i \delta q_i]_{t_1}^{t_2}
\end{aligned}$$

よって, 作用の停留より以下の正準方程式 (canonical equations) を得る.

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

[*8] 最小作用の原理は作用の停留性を表しているが, 最小性は表していない. 仮に作用の第 2 変分を計算したとしても, 最小性を証明することは難しい.
[*9] Newton の運動方程式との決定的な違いである.
[*10] $f''(\xi) < 0$ の場合も同様に議論される.

♣ Section 2. 復習：数ベクトル空間上のテンソル代数

♢ 2.1. 反変ベクトルと共変ベクトル

K 上の線形空間 V に対して V から K への線形写像全体の集合は線形空間であり, これを V の双対空間 (dual space) と呼ぶ.
ここで V の元を反変ベクトルと呼び, その双対空間 V^* の元を共変ベクトルと呼ぶ.
以降, $\mathbb{R}^3$ について考える.

反変ベクトルの基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ に対して $f_i \equiv f(\boldsymbol{e}_i)$ を並べてできる数ベクトルは共変ベクトルを特徴づける．これを共変ベクトルの成分 (component) と呼ぶ.
基底の変換にともなって反変ベクトルの成分は対照的に変換され, 共変ベクトルの成分は同様に変換される.
また, $\phi_i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ を満たす $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ は双対空間の基底であり, これを双対基底 (dual basis) と呼ぶ.
よって双対空間 $\mathbb{R}^{3*}$ からスカラー全体の集合 $\mathbb{R}$ への線形写像に対して同様に数ベクトルを構成すれば, その成分は反変ベクトルの性質をもつ．すなわち, 反変ベクトルと共変ベクトルは双対概念である.

♢ 2.2. 反変テンソルと共変テンソル

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}$ への双線形写像を 2 階の共変テンソルと呼び, $\mathbb{R}^{3*} \times \mathbb{R}^{3*}$ から $\mathbb{R}$ への双線形写像を 2 階の反変テンソルと呼ぶ.[*11]
2 階の共変テンソル f の成分を $f_{ij} \equiv f(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ で定めればこれらは f を特徴づけるし, 反変テンソルの成分も同様である.
ここで基底の変換にともなって反変テンソルの成分は対照的に変換され, 共変テンソルの成分は同様に変換される.

一般に $\mathbb{R}^3 \times \cdots \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3*} \times \cdots \times \mathbb{R}^{3*}$ から $\mathbb{R}$ への多重線形写像を r 階反変と s 階共変の混合テンソルと呼び, 以降では (r, s) テンソルと呼ぶ.

♢ 2.3. 計量テンソル

内積空間 V において内積は 2 階の共変テンソルである.
このときのテンソルを計量テンソル (metric tensor) と呼び, $\mathbb{R}^3$ の計量テンソルは以下である.

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで, 反変ベクトル v^μ に対して $v_\mu \equiv g_{\mu\nu} v^\nu$ $(\mu = 1, 2, 3)$ は成分の変換より共変ベクトルである.
これを反変ベクトルの共変成分 (covariance component) と呼び, 反変テンソルの共変成分も同様に定義される.

♢ 2.4. テンソルの演算

テンソルの演算は成分を用いて以下で定義される.
　[(同階の) テンソルの和]　各成分の和を成分とするテンソル
　[テンソルのスカラー倍]　各成分のスカラー倍を成分とするテンソル
　[テンソル積]　たとえば $S \bigotimes T \equiv (S^i{}_j T^k{}_{lm})$.
　(一般に (r, s) テンソルと (r', s') テンソルのテンソル積は $(r + r', s + s')$ テンソルである.)

たとえば $\boldsymbol{e}_i \bigotimes \boldsymbol{e}_j$ は 2 階の反変テンソル全体の集合の基底であり, 共変テンソルや混合テンソルも同様である.
これらは通常の基底における成分こそ一致するが, 基底の変換にともなって成分に相違がある.

[*11] もちろん, 一般の線形空間に拡張されてもよい.

♣ Section 3. 復習：特殊相対性理論

♢ 3.1. 特殊相対性理論の出来

Lorentz は, Michelson-Morley の実験結果から Lorentz 収縮 (エーテルに対して速度 V で運動する物体の長さが進行方向に $\sqrt{1-(V/c)^2}$ 倍縮むこと) を提唱し, その説明づけを電子論 (物体を荷電粒子の集まりとする観点) に求めた.[*12][*13]
具体的には, Maxwell 方程式が共変に保たれるような慣性系間の座標変換として以下の Lorentz 変換を提唱した.[*14]

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1),\quad x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0),\quad x'^2 = x^2,\quad x'^3 = x^3 \qquad (\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2},\quad \beta \equiv V/c)$$

たしかにこの変換から Lorentz 収縮は得られるが, これを認めれば異なる慣性系において同一の時間が共有されなくなるから当時の物理学者には (Lorentz すらも) 受け入れがたいものであった.
そこで Einstein は Lorentz 変換は以下の要請から導かれるとし, これらをもとに特殊相対性理論を構築した.[*15][*16]

特殊相対性理論の基本要請

1) 相対性原理 $\cdots$ すべての慣性系において物理法則は同じ形で書かれる.
2) 光速不変の原理 $\cdots$ すべての慣性系において光速は不変である.

♢ 3.2. 波動と 4 元ベクトル

< 波動 >

(空間的に)1 次元の正弦波は $\phi(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \alpha)$ で書かれる.
ここで, $T \equiv 2\pi/\omega$ は $\phi(x,t) = \phi(x, t+T)$ を満たし, これを周期 (period) と呼ぶ.
(単位時間あたりに含まれる周期の数 $\nu \equiv 1/T$ を振動数 (frequency) と呼ぶ.)
一方, $\lambda \equiv 2\pi/k$ は $\phi(x+\lambda, t) = \phi(x,t)$ を満たし, これを波長 (wave length) と呼ぶ.
(k は波数 (wave number) と呼ばれ, 2π に含まれる波長の数である.)
また, 波動の伝わる速さ (位相速度) は $\phi(x+\Delta x, t+\Delta t) = \phi(x,t)$ より $v \equiv \Delta x/\Delta t = \omega/k$ である.

(空間的に)3 次元の正弦波 $\phi(\boldsymbol{r},t) = A\sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \alpha)$ に対して $\boldsymbol{k} \equiv (k_x, k_y, k_z)$ を波数ベクトル (wave number vector) と呼ぶ.
波数ベクトルの方向に X 軸をとり, $\boldsymbol{r} \equiv (x,y,z)$ の X 成分を X とすれば $k_x x + k_y y + k_z z = |\boldsymbol{k}|X$ であるから正弦波は波数ベクトルの方向に進み, 波数 $|\boldsymbol{k}|$, 角振動数 ω をもつ.
よって位相速度は $v = \omega/|\boldsymbol{k}|$ である.

<4 元波数ベクトル >

K 系における 3 次元の正弦波を K' 系からみれば以下で書かれる.

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r},t) &= A\sin\left(k_x\gamma(x'+Vt') + k_y y' + k_z z' - \omega\gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right) + \alpha\right) = A\sin\left(\gamma\left(k_x + \frac{V}{c^2}\omega\right)x' + k_y y' + k_z z' - \gamma(\omega - Vk_x)t' + \alpha\right)\\ &= A\sin(k'_x x' + k'_y y' + k'_z z' - \omega' t' + \alpha)\end{aligned}$$

ここで (k^0, k_x, k_y, k_z) $(k^0 \equiv \omega/c)$ は 4 元座標と同様に変換され, これを 4 元波数ベクトルと呼ぶ.[*17]
したがって $(k^0)^2 - \boldsymbol{k}^2$ は Lorentz 変換に対して不変であり, 特に光に対しては $k^0/|\boldsymbol{k}| = v/c = 1$ であるから $(k^0)^2 - \boldsymbol{k}^2 = 0$ である.

< 光子のエネルギーと運動量 >

光子のエネルギーは $\varepsilon = \hbar\omega$ であり, 運動量は $p = \hbar|\boldsymbol{k}|$ である.
このとき, $p^0 \equiv \varepsilon/c$ と $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$ は 4 元ベクトルであり, これをエネルギー・運動量 4 元ベクトル (energy-momentum 4-vector) と呼ぶ.
ここで, 明らかに $\varepsilon^2 - c^2\boldsymbol{p}^2 = 0$ である.

[*12] 正確にはこの時点では Lorentz の収縮仮説である.
[*13] たとえば電子論の立場では, 物体の大きさは物体を構成する荷電粒子間の相互作用における平衡状態として捉えられる.
[*14] Lorentz 変換は形式上, Galilei 変換を内包する.
[*15] 特殊相対性理論ではすべての慣性系は平等であるから Einstein は Lorentz と異なりエーテルの存在を仮定しない.
[*16] [補足] 基本要請による Lorentz 変換の導出
K 系に対して x 方向に速度 V で動く K' 系を考えれば, K 系の原点から光が放射されたときに以下が成り立つ.

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2,\quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$$

よって Lorentz 変換を用いて係数比較を行えばよい.
[*17] 一般に 4 元座標と同様に変換される量を 4 元ベクトル (4-vector) と呼ぶ.

◇ 3.3. 広義の Lorentz 変換

<Lorentz 変換の合成 >

K 系に対して x 方向に速度 V で移動する K' 系と, それに対して x 方向に速度 V' で移動する K'' 系を考える.
ここで Lorentz 変換 $(t,x)\mapsto(t',x')$ と $(t',x')\mapsto(t'',x'')$ の表現行列は以下である.

$$\Lambda(V)=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma V/c^2\\ -\gamma V & \gamma\end{pmatrix}\qquad \Lambda(V')=\begin{pmatrix}\gamma' & -\gamma' V'/c^2\\ -\gamma' V' & \gamma'\end{pmatrix}$$

よって Lorentz 変換 $(t,x)\mapsto(t'',x'')$ の表現行列は以下である.[18]

$$\Lambda(V'')=\Lambda(V)\Lambda(V')=\begin{pmatrix}\gamma'\gamma(1+V'V/c^2) & -\gamma'\gamma(V'+V)/c^2\\ -\gamma'\gamma(V'+V) & \gamma'\gamma(1+V'V/c^2)\end{pmatrix}$$

したがって, K 系に対する K'' 系の移動速度は $V''=(V'+V)/(1+V'V/c^2)$ である.

< 任意の方向の Lorentz 変換 >

$(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2$ を保つ線形変換を広義の Lorentz 変換と定める.[19]

(例)・z 軸まわりに x,y 軸を角度 ϕ だけ回転させる変換 $\Lambda_z(\phi)$ は広義 Lorentz 変換である.
　　・空間反転 $\Lambda(P)$ と時間反転 $\Lambda(T)$ は広義 Lorentz 変換である.

ここで xy 平面内で x 軸と角度 ϕ をなす方向に速度 $\boldsymbol{V}$ で移動する慣性系に対して, その方向を X 軸とすれば以下が成り立つ.

$$\begin{pmatrix}x'^0\\x'^1\\x'^2\\x'^3\end{pmatrix}=\Lambda_z(-\phi)\Lambda_X(V)\Lambda_z(\phi)\begin{pmatrix}x^0\\x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\phi&-\sin\phi&0\\0&\sin\phi&\cos\phi&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma&-\gamma V/c&0&0\\-\gamma V/c&\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\phi&\sin\phi&0\\0&-\sin\phi&\cos\phi&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^0\\x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\gamma&-\gamma V_x/c&-\gamma V_y/c&0\\-\gamma V_x/c&1+(\gamma-1){V_x}^2/V^2&(\gamma-1)V_xV_y/V^2&0\\-\gamma V_y/c&(\gamma-1)V_xV_y/V^2&1+(\gamma-1){V_y}^2/V^2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^0\\x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}\qquad(V_x\equiv V\cos\phi, V_y\equiv V\sin\phi)$$

また, yz 平面内である場合も同様であるからそれらを合成すれば以下の任意の方向への Lorentz 変換を得る.

$$\Lambda(\boldsymbol{V})=\begin{pmatrix}\gamma&-\gamma V_x/c&-\gamma V_y/c&-\gamma V_z/c\\-\gamma V_x/c&1+(\gamma-1){V_x}^2/V^2&(\gamma-1)V_xV_y/V^2&(\gamma-1)V_xV_z/V^2\\-\gamma V_y/c&(\gamma-1)V_yV_x/V^2&1+(\gamma-1){V_y}^2/V^2&(\gamma-1)V_yV_z/V^2\\-\gamma V_z/c&(\gamma-1)V_zV_x/V^2&(\gamma-1)V_zV_y/V^2&1+(\gamma-1){V_z}^2/V^2\end{pmatrix}$$

◇ 3.4. 相対論的力学

慣性系間では時間が変換されることによって速度や加速度が正当に比較され得ない.
そこで Einstein は慣性系間で不変な粒子の固有時を導入することで相対論的力学の構築を行った.

< 速度と加速度の変換則 >

速度と加速度は慣性系間で以下のように変換される.

$$v'_x=\frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'}=\frac{v_x-V}{1-Vv_x/c^2},\quad v'_y=\frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dt'}=\frac{1}{\gamma}\frac{v_y}{1-Vv_x/c^2},\quad v'_z=\frac{dz'}{dt}\frac{dt}{dt'}=\frac{1}{\gamma}\frac{v_z}{1-Vv_x/c^2}$$

$$a'_x=\frac{dv'_x}{dt}\frac{dt}{dt'}=\frac{a_x\left(1-\frac{Vv_x}{c^2}\right)-(v_x-V)\left(-\frac{V}{c^2}a_x\right)}{\left(1-\frac{Vv_x}{c^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{Vv_x}{c^2}\right)}=\frac{1}{\gamma}\frac{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}{\left(1-\frac{Vv_x}{c^2}\right)^3}a_x$$

$$a'_y=\frac{dv'_y}{dt}\frac{dt}{dt'}=\frac{1}{\gamma}\frac{a_y\left(1-\frac{Vv_x}{c^2}\right)-v_y\left(-\frac{V}{c^2}a_x\right)}{\left(1-\frac{Vv_x}{c^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{Vv_x}{c^2}\right)}=\frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{Vv_x}{c^2}\right)^2}a_y+\frac{v_y}{\left(1-\frac{Vv_x}{c^2}\right)^3}\frac{V}{c^2}a_x\right)$$

$$a'_z=\frac{dv'_z}{dt}\frac{dt}{dt'}=\frac{1}{\gamma}\frac{a_z\left(1-\frac{Vv_x}{c^2}\right)-v_z\left(-\frac{V}{c^2}a_x\right)}{\left(1-\frac{Vv_x}{c^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{Vv_x}{c^2}\right)}=\frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{Vv_x}{c^2}\right)^2}a_z+\frac{v_z}{\left(1-\frac{Vv_x}{c^2}\right)^3}\frac{V}{c^2}a_x\right)$$

ここで, 以下が成り立つ.

$$1-\left(\frac{v'_x}{c}\right)^2-\left(\left(\frac{v'_y}{c}\right)^2+\left(\frac{v'_z}{c}\right)^2\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{Vv_x}{c^2}\right)^2}\left(\left(1-\frac{Vv_x}{c^2}\right)^2-\left(\frac{v_x}{c}-\frac{V}{c}\right)^2\right)-\frac{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}{\left(1-\frac{Vv_x}{c^2}\right)^2}\left(\left(\frac{v_y}{c}\right)^2+\left(\frac{v_z}{c}\right)^2\right)=\frac{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}{\left(1-\frac{Vv_x}{c^2}\right)^2}\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

よって $|\boldsymbol{V}|<c$ であるならば両辺の正負から $|\boldsymbol{v}|<c\Leftrightarrow|\boldsymbol{v}'|<c$ である. すなわち質点の速さはいずれの慣性系でも光速を超えない.

---

[18] 経験的に Lorentz 変換全体の集合は積で閉じていることが知られているから群である.
[19] 狭義の Lorentz 変換では $(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2=0$ が成り立つ.

<4元速度と4元加速度>

広義の Lorentz 変換に対して $s\equiv\int\sqrt{1-(v/c)^2}dt$ は不変量であり, $v=0$ (物体に固定された座標系) では通常の時間である.
これを運動する粒子の固有時 (proper time) と呼ぶ.

ここで $u^\mu\equiv dx^\mu/ds$ $(\mu=0,1,2,3)$ を4元速度 (4-velocity) と呼び, 具体的には以下で表される.

$$u^0=\frac{c}{\sqrt{1-(v/c)^2}},\quad u^1=\frac{v_x}{\sqrt{1-(v/c)^2}},\quad u^2=\frac{v_y}{\sqrt{1-(v/c)^2}},\quad u^3=\frac{v_z}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

また, $\alpha^\mu\equiv du^\mu/ds$ $(\mu=0,1,2,3)$ を4元加速度 (4-acceleration) と呼び, 具体的には以下で表される.[*20][*21]

$$\alpha^0=\frac{va}{c(1-(v/c)^2)^2},\quad \alpha^1=\frac{a_x}{1-(v/c)^2}+\frac{v_xva}{c^2(1-(v/c)^2)^2},\quad \alpha^2=\frac{a_y}{1-(v/c)^2}+\frac{v_yva}{c^2(1-(v/c)^2)^2},\quad \alpha^3=\frac{a_z}{1-(v/c)^2}+\frac{v_zva}{c^2(1-(v/c)^2)^2}$$

<4元運動方程式>

静止質量 m_0 の物体に対して $p^\mu\equiv m_0u^\mu$ $(\mu=0,1,2,3)$ を4元運動量 (4-momentum) と呼び, 4元運動方程式 $F^\mu=dp^\mu/ds$ $(\mu=0,1,2,3)$ が成り立つように4元力 (4-force) を定義する.

$$F^k=\frac{f^k}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\ (k=1,2,3),\quad F^0=\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{c}$$

ここで第0成分は以下より理解される.

$$\frac{dp^0}{dt}=\frac{m_0c}{(1-(v/c)^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}}{c^2}=\frac{\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}}{c}$$

粒子が静止している座標系では $F'^0=0$ であるから $F^1=F'^1/\sqrt{1-(v/c)^2}$, $F^2=F'^2$, $F^3=F'^3$ より以下が力の変換則である.

$$f^1=f'^1,\quad f^2=\sqrt{1-(v/c)^2}f'^2,\quad f^3=\sqrt{1-(v/c)^2}f'^3$$

よって静止系と比べて力は運動と垂直な方向に Lorentz 収縮している.

< 相対論的質量 >

$p^\mu=m_0u^\mu=mv^\mu$ $(\mu=1,2,3)$ を満たす m を相対論的質量と呼び, $m=m_0/\sqrt{1-(v/c)^2}$ より粒子の速度とともに増大する.
ここで $E\equiv mc^2$ は $dp^0/dt=(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v})/c$ より $dE/dt=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}$ であるからエネルギーである.
また, $v\ll c$ であるならば以下が成り立つから運動エネルギーも静止質量で表される.

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\simeq m_0c^2+\frac{1}{2}m_0v^2$$

*20 4元速度も4元加速度も明らかに $v=0$ でその空間成分は通常の速度や加速度 (すなわち 0) と一致する.

*21 以下を参考にされたい.

$$\alpha^\mu=\frac{dt}{ds}\frac{du^\mu}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\times\begin{cases}c & (\mu=0)\\ v^\mu & (\mu=1,2,3)\end{cases}$$

◇ 3.5. Maxwell 方程式の Lorentz 共変性

< 電磁場の変換則 >

慣性系間では以下のように電磁場が変換される. (のちに示す.)

$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - VB_z), \quad E'_z = \gamma(E_z + VB_y), \quad B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B_y + V/c^2 E_z), \quad B'_z = \gamma(B_z + V/c^2 E_y)$

< 電流密度の変換則 >

速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する点電荷 q は以下の電荷密度と電流密度をもつ.

$\rho(\boldsymbol{r}, t) = q\delta(x - v_x t)\delta(y - v_y t)\delta(z - v_z t), \quad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{v}\rho(\boldsymbol{r}, t)$

ここで以下が成り立つ.[*22]

$$\delta(x - v_x t) = \frac{1}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)}\delta(x' - v'_x t'), \quad \delta(y - vy_t) = \delta(y' - v'_y t'), \quad \delta(z - vz_t) = \delta(z' - v'_z t')$$

よって $j^0 \equiv c\rho$ とすれば以下が成り立ち, これらを 4 元電流密度 (4-current) と呼ぶ.

$j'^0 = \gamma(j^0 - \beta j^1), \quad j'^1 = \gamma(j^1 - \beta j^0), \quad j'^2 = j^2, \quad j'^3 = j^3$

<Maxwell 方程式の Lorentz 共変性 >

まず, 以下が成り立つ.

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{V}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial x}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t} = \gamma\left(V\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}$$

1) 電場に関する Gauss の法則

$$\mathrm{div}'\boldsymbol{E}' = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{V}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_x + \frac{\partial}{\partial y}\gamma(E_y - VB_z) + \frac{\partial}{\partial z}\gamma(E_z + VB_y) = \gamma\left(\mathrm{div}\boldsymbol{E} - V\left((\mathrm{rot}\boldsymbol{B})_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}\right)\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\gamma\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)\rho = \frac{\rho'}{\varepsilon_0}$$

2) 磁場に関する Gauss の法則

$$\mathrm{div}'\boldsymbol{B}' = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{V}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)B_x + \frac{\partial}{\partial y}\gamma(B_y - \frac{V}{c^2}E_z) + \frac{\partial}{\partial z}\gamma(B_z - \frac{V}{c^2}E_y) = \gamma\left(\mathrm{div}\boldsymbol{B} - \frac{V}{c^2}\left((\mathrm{rot}\boldsymbol{E})_x + \frac{\partial B_x}{\partial t}\right)\right) = 0$$

3) Ampere の法則

$$\begin{aligned}
(\mathrm{rot}'\boldsymbol{B}')_x - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E'_x}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial y}\gamma\left(B_z - \frac{V}{c^2}E_y\right) - \frac{\partial}{\partial z}\gamma\left(B_y + \frac{V}{c^2}E_z\right) - \varepsilon_0\mu_0\gamma\left(V\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial t}\right) \\
&= \gamma((\mathrm{rot}\boldsymbol{B})_x - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_x}{\partial t} - \varepsilon_0\mu_0 V\mathrm{div}\boldsymbol{E}) \\
&= \gamma(\mu_0 j_x - \mu_0 V\rho) \\
&= \gamma\mu_0(v_x - V)q\delta(x - v_x t)\delta(y - v_y t)\delta(z - v_z t) \\
&= \mu_0\frac{v_x - V}{1 - (Vv_x/c^2)}q\delta(x' - v'_x t')\delta(y' - v'_y t')\delta(z' - v'_z t') \\
&= \mu_0 j' x
\end{aligned}$$

4) 電磁誘導則

$$(\mathrm{rot}'\boldsymbol{E}')_x + \frac{\partial B'_x}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial y}\gamma\left(E_z - VB_y\right) - \frac{\partial}{\partial z}\gamma\left(E_y + B_z\right) + \gamma\left(V\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial t}\right) = \gamma((\mathrm{rot}\boldsymbol{E})_x + \frac{\partial B_x}{\partial t} + V\mathrm{div}\boldsymbol{B}) = 0$$

◇ 3.6. Minkowski 空間

計量テンソルが以下である不定内積空間 $\mathbb{R}^4$ を Minkowki 空間 (Minkowski space) と呼ぶ.

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ここで, 広義の Lorentz 変換は $x^\mu x_\mu = \mathrm{const.}$ を満たす線形変換 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ であるから, $\Lambda^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$ より $|\Lambda^\mu{}_\nu| = \pm 1$ である. 特に $|\Lambda^\mu{}_\nu| = 1$ であるものを固有 Lorentz 変換 (proper Lorentz transformation) と呼ぶ.[*23][*24]

[*22] デルタ関数では $\delta(ax) = \delta(x)/a$ $(a \in \mathbb{R})$ が成り立つ.

[*23] たとえば空間反転と時間反転は固有 Lorentz 変換でない.

[*24] すなわち広義の Lorentz 変換はノルムを保つ線形変換である.

◇ 3.7. Maxwell 方程式のポテンシャル表現

場とポテンシャルの関係式は (磁場に関する)Gauss の法則と電磁誘導則に由来したから, 残りの Maxwell 方程式をポテンシャルを用いて書き換える.
まず, 以下の条件を課す.

Lorentz 条件 (Lorentz condition) : $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\phi}{\partial t}+\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$

よって Maxwell 方程式は以下で書かれる.[*25]

$$\Box\phi=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\qquad \mu_0\boldsymbol{j}=\Box\boldsymbol{A},\qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$$

ここで以下は $\Box\phi=\rho/\varepsilon$ と $\mu_0\boldsymbol{j}=\Box\boldsymbol{A}$ と同値な式であるから Lorentz 条件は電荷保存則に相当する. すなわち, Lorentz 条件は古典電磁気学と無矛盾である.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=\mu_0\frac{\partial\rho}{\partial t}$$
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial A_x}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial A_x}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial A_x}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial A_x}{\partial x}=\mu_0\frac{\partial j_x}{\partial x}\quad (y,z\ \text{成分も同様.})$$

反変ベクトルによる偏微分は Lorentz 変換 (反変ベクトルの変換) と対照的に変換されるから共変ベクトルの性質をもち, これを ∂_μ と表記する. 同様に共変ベクトルによる偏微分は反変ベクトルの性質をもち, これを ∂^μ と表記する.
よって 4 元ポテンシャル (4-potential) $A^\mu\equiv(\phi/c,\boldsymbol{A})$ を用いれば, Maxwell 方程式は以下で書かれる.[*26]

Maxwell 方程式の電磁ポテンシャルによる表現

$$\partial^\nu\partial_\nu A^\mu=\mu_0 j^\mu\quad(\mu=0,1,2,3),\qquad \partial_\mu A^\mu=0$$

◇ 3.8. 電磁場テンソル

2 階の交代反変テンソル $f^{\mu\nu}\equiv\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$ は以下のように 4 元ポテンシャルと電磁場の関係を表すテンソルであるから, 電磁場テンソル (electromagnetic field tensor) と呼ばれる.

$$(f^{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0&-E_x/c&-E_y/c&-E_z/c\\E_x/c&0&-B_z&B_y\\E_y/c&B_z&0&-B_x\\E_z/c&-B_y&B_x&0\end{pmatrix}$$

Lorentz 変換に伴って電磁場テンソルは $(f'^{\rho\sigma})=(\Lambda^\rho_\mu)(f^{\mu\nu})^t(\Lambda^\sigma_\nu)$ と変換されるから以下を得る.

$$(f'^{\rho\sigma})=\begin{pmatrix}0&-E_x/c&-\gamma(E_y/c-\beta B_z)&-\gamma(E_z/c+\beta B_y)\\E_x/c&0&-\gamma(B_z-\beta E_y/c)&\gamma(B_y+\beta E_z/c)\\\gamma(E_y/c-\beta B_z)&\gamma(B_z-\beta E_y/c)&0&-B_x\\\gamma(E_z/c+\beta B_y)&-\gamma(B_y+\beta E_z/c)&B_x&0\end{pmatrix}$$

よって, 同一の事象における慣性系間の電磁場の関係式は以下である.

$$E'_x=E_x,\quad E'_y=\gamma(E_y-VB_z),\quad E'_z=\gamma(E_z+VB_y)$$
$$B'_x=B_x,\quad B'_y=\gamma(B_y+V/c^2E_z),\quad B'_z=\gamma(B_z-V/c^2E_y)$$

[*25] $\Box\equiv\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta$ をダランベルシアンと呼び, たとえば Lorentz 条件のもとでゲージ関数は $\Box\chi=0$ を満たす.
[*26] Maxwell 方程式の Lorentz 共変性より 4 元ポテンシャルは反変ベクトルで定義されている.

♣ Section 4. 電磁場の解析力学

◇ 4.1. 一般化ポテンシャル

Lorentz 力のような速度に依存する非保存力に対して最小作用の原理を満たすように一般化ポテンシャルを定義する.
具体的には Lagrangian が $L=\frac{1}{2}m\dot{q_i}^2-U(q_i,\dot{q_i})$ であるとして作用が停留する (すなわち Lagrange 方程式が成り立つ) ためには以下を満たす U を一般化ポテンシャルとすればよい.[*27]

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}}\right)=0 \ \Leftrightarrow\ -\frac{\partial U}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(m_i\dot{q_i}-\frac{\partial U}{\partial \dot{q_i}}\right)=0 \ \Leftrightarrow\ F_i=-\frac{\partial U}{\partial q_i}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}}\right)$$

◇ 4.2. 荷電粒子の Lagrangian

Lorentz 力に対する一般化ポテンシャルは $U=q(\phi-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$ である.
実際, $\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})}{\partial\boldsymbol{r}}=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$, $\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})}{\partial\boldsymbol{v}}=\left(\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\right)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{A}\times\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{v}\right)=\boldsymbol{A}$ より以下が成り立つ.[*28][*29]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}=-q\mathrm{grad}\phi+q\mathrm{grad}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})-\frac{d}{dt}\left(q\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})}{\partial\boldsymbol{v}}\right)&=-q\mathrm{grad}\phi+q(\mathrm{v}\times\boldsymbol{B})-q\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\right)\\&=-q\mathrm{grad}\phi+q(\mathrm{v}\times\boldsymbol{B})-q\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}\frac{dx}{dt}-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y}\frac{dy}{dt}-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\end{aligned}$$

よって荷電粒子の Lagrangian は $L=\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2-q(\phi-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$ であり, r に対する共役運動量は $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}+q\boldsymbol{A}$ であるから Hamiltonian は $H=\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2+q\phi$ である.

ここでもちろん, Lagrangian はゲージ不変である.

$$L'=\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2-q\phi'+q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}'=\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2-q\phi+q\frac{\partial\chi}{\partial t}+q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}+q\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{\partial\chi}{\partial\boldsymbol{r}}=L+q\frac{d\chi}{dt}$$

◇ 4.3. Maxwell 方程式と電磁場テンソル

Maxwell 方程式は以下で表される.[*30]

$$\partial_\nu f^{\mu\nu}=-\mu_0 j^\mu,\quad \partial_\rho f_{\mu\nu}+\partial_\mu f_{\nu\rho}+\partial_\nu f_{\rho\mu}=0$$

実際, 以下の計算から第 1 式は電場に関する Gauss の法則と Ampere の法則であるし, 第 2 式は磁場に関する Gauss の法則と電磁誘導則であることが確かめられる.

$$\partial_\nu f^{0\nu}=-\mathrm{div}\frac{\boldsymbol{E}}{c},\quad \partial_\nu f^{1\nu}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}-\frac{\partial B_z}{\partial y}+\frac{\partial B_y}{\partial z},\quad \partial_3 f^{12}+\partial_1 f^{23}+\partial_2 f^{31}=-\mathrm{div}\boldsymbol{B},\quad \partial_0 f^{12}+\partial_1 f^{20}+\partial_2 f^{01}=-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}+\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

◇ 4.4. 電磁場の作用

最小作用の原理を拡張することで場の作用 (action of field) を定義する. 場の作用は以下で構成される.

$$S=S_{matter}+S_{field}+S_{int}$$

ここで (運動の軌道が固定された上で) 場を変関数としたときの停留が場の方程式であるような汎関数を場の運動項と物質と場の相互作用項の和と定義し, (場を固定した上で) 一般化座標を変関数としたときの停留が 4 元運動方程式であるような汎関数を物質の運動項と物質と場の相互作用項の和と定義する.
このとき, 電磁場の作用は以下である.

$$S=-\Sigma mc^2\int ds+\frac{1}{4\mu_0}\iint f^{\mu\nu}f_{\mu\nu}d^3\boldsymbol{r}dt+\iint j^\mu A_\mu d^3\boldsymbol{r}dt$$

以下にこれを推測するにあたる留意点を述べる.
1) 物質の運動項 : 作用の次元はエネルギー×時間であるから自然である.
2) 場の運動項 : $f^{\mu\nu}f_{\mu\nu}/\mu_0=2(|\boldsymbol{B}|^2-|\boldsymbol{E}|^2/c^2)/\mu_0$ はエネルギーの次元をもつから自然である. [*31]
3) 物質と場の相互作用項 : 荷電粒子の場合は一般化ポテンシャルから推測されるからこれを一般の場合に拡張すればよい.
もちろん, この作用から Maxwell 方程式と荷電粒子の 4 元運動方程式が導出される.

[*27] index i は粒子を識別するものである.
[*28] $\mathrm{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$ を利用した.
[*29] Lagrange 形式では $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ は互いに独立であることに留意されたい.
[*30] 第 2 式は Bianch 恒等式と呼ばれる.
[*31] 電磁場の Lagrangian 密度は $\mathcal{L}=-\frac{1}{2\mu_0}(|\boldsymbol{E}|^2/c^2-|\boldsymbol{B}|^2)$ である.

[Maxwell 方程式の導出]

$A_\mu \to A + \delta A_\mu,\ f^{\mu\nu} \to f^{\mu\nu} + \delta f^{\mu\nu}$ で場の許容関数を与えれば $S = \dfrac{1}{4\mu_0}\iint f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} d^3\boldsymbol{r}dt + \iint j^\mu A_\mu d^3\boldsymbol{r}dt$ の変分は以下である.

$$\begin{aligned}
\delta S = \frac{1}{4\mu_0}\iint (\delta f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + f^{\mu\nu}\delta f_{\mu\nu}) d^3\boldsymbol{r}dt + \iint j^\mu \delta A_\mu d^3\boldsymbol{r}dt &= \frac{1}{2\mu_0}\iint (f^{\mu\nu}\delta(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)) d^3\boldsymbol{r}dt + \iint j^\mu \delta A_\mu d^3\boldsymbol{r}dt \\
&= -\frac{1}{\mu_0}\iint (f^{\mu\nu}\delta(\partial_\nu A_\mu)) d^3\boldsymbol{r}dt + \iint j^\mu \delta A_\mu d^3\boldsymbol{r}dt \\
&= -\frac{1}{\mu_0}\iint (\partial_\nu (f^{\mu\nu}\delta A_\mu)) d^3\boldsymbol{r}dt + \frac{1}{\mu_0}\iint (\partial_\nu f^{\mu\nu})\delta A_\mu) d^3\boldsymbol{r}dt + \iint j^\mu \delta A_\mu d^3\boldsymbol{r}dt \\
&= -\frac{1}{\mu_0}\int f^{\mu\nu}\delta A_\mu dS_\nu + \frac{1}{\mu_0}\iint (\partial_\nu f^{\mu\nu})\delta A_\mu) d^3\boldsymbol{r}dt + \iint j^\mu \delta A_\mu d^3\boldsymbol{r}dt
\end{aligned}$$

ここで最後の表式に ($\mathbb{R}^4$ 上の)Stokes の定理を用いており, この領域の境界は空間座標については無限遠であるから $f^{\mu\nu} \to 0$ であり,
時間座標については作用の定義における端点であるから $\delta A_\mu = 0$ である.
よって作用の停留と基本補題より $\partial_\nu f^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\mu$ を得る.

参考文献

[1] I.M. Gelfand, S.V.Fomin, 変分法, 総合図書, 1975.
[2] 前野 昌弘, よくわかる解析力学, 東京図書, 2017.
[3] 畑 浩之, 基幹講座物理学 解析力学, 東京図書, 2014.
[4] 江沢 洋, 相対性理論, 裳華房, 2008.
[5] 田代 嘉宏, テンソル解析, 裳華房, 2006.
[6] 須藤 靖, 解析力学・量子論, 東京大学出版会, 2008.
[7] 砂川 重信, 理論電磁気学 第 3 版, 紀伊國屋書店, 1999.