幾何学的代数
～代数幾何に向けて～

芝浦工業大学 数理科学研究会
BV18025 加藤諒

令和元年 11 月 1 日

研究背景

現代社会を生きていくからには，現代数学を学ぶべきである．そんな中，ある先生から代数幾何の勉強をすることを勧めていただき，今回のテーマとすることにした．本発表では，“代数幾何”の入門書の中でも図書館で見つけて惹かれた数学書 [1] の内容を紹介する．この本では，“代数幾何”の題材として様々な代数系とその代数系における演算の幾何的な解釈が説明されており，抽象的で解釈の難しい代数学と幾何学のつながりや違いを学ぶことができると考えた．

1　ハミルトンの四元数代数

ハミルトン代数系とは，四元数を導入し，四元数積とよぶ新しい演算を用いる体系である．

1.1　四元数の導入

四つの実数 q_0, q_1, q_2, q_3 を，記号 i, j, l を用いて

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

と表したものを**四元数**という．この空間は代数系であり，この代数系を**ハミルトン代数系**と呼ぶ．このとき，「和」“＋”は集合を表しているに過ぎない．また，q の**逆元** $q^\dagger$ を次のように定義する:

$$q^\dagger = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$$

1.2　四元数による回転の表示

ベクトルとみなした単位四元数 q と，四元数とみなしたベクトル $\boldsymbol{a}$ の四元数積 $\boldsymbol{a}' = q\boldsymbol{a}q^\dagger$ を考えると，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}' &= q\boldsymbol{a}q^\dagger \\ &= \boldsymbol{a}\cos\Omega + \boldsymbol{l}\times\boldsymbol{a}\sin\Omega + \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{l}\rangle\boldsymbol{l}(1-\cos\Omega)\end{aligned}$$

を得る．(ここで，$q_0 = \cos\dfrac{\Omega}{2}$，$q = \cos\dfrac{\Omega}{2} + \boldsymbol{l}\sin\dfrac{\Omega}{2}$ とおいた．) この結果から，四元数 q が，回転軸 $\boldsymbol{l}$ の周りの回転角 Ω の回転を表すことを示している．

2　グラスマンの外積代数

グラスマン代数系とは，縮約とよぶ新しい演算を用いる体系である．

2.1　部分空間と外積

部分空間とは，ベクトル空間の部分集合であって，それ自身がもとのベクトル空間の演算で閉じたベクトル空間になっているものをいう．また，部分空間を外積を用いて書く．例えば，同一直線上にないベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は平面を張り，この平面を $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ と書く．このような多重ベクトルから成る代数系を**グラスマン代数系**と呼ぶ．

2.2　縮約と内積

k 次元部分空間をより次元の低い部分空間に縮小する操作を縮約という．具体的には，k 次元部分空間を定義する k 重ベクトルに対して，別の j 重ベクトル $(j \le k)$ で内積をとることで $(k-j)$ 次元空間に縮小する．

2.3　縮約の幾何学的な意味

内積をとるなどの計算規則に従って縮約を考えると，部分空間を k 重ベクトルによって縮約した空間は，もとの部分空間に含まれ，次元が k だけ低下した部分空間であり，その k 重ベクトルの表す部分空間に直交する．

3　幾何学積とクリフォード代数

クリフォード代数系とはハミルトン代数系とグラスマン代数系を結合したもので，幾何学積とよぶ新しい演算を用いる体系である．

3.1　幾何学積の導入

幾何学積の計算規則を次のように定義する．

$$e_1{}^2 = e_2{}^2 = e_3{}^2 = 1$$
$$e_2e_3 = -e_3e_2\ ,\ e_3e_1 = -e_1e_3\ ,\ e_1e_2 = -e_2e_1$$

したがって，各元は多重ベクトルの形式和となる．このような幾何学積が定義された多重ベクトルから成る代数系を**クリフォード代数系**と呼ぶ．それらの間の積 (幾何学積) は結合則を満たし，上の規則に従うものとする．

命題 (幾何学積の縮約と外積による表現)**.** ベクトル $\boldsymbol{a}$ と k 重ベクトル $(\boldsymbol{x_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{x_k})$ $(k = 1,2,3)$ との幾何学積は，次のように縮約と外積との和で表せる．

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{x_k}) = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{x_k}) + \boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{x_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{x_k})$$

これを適応すれば，すべての幾何学積を縮約と内積で表すことができる．

3.2　幾何学積による回転の表示

ここでは鏡映による回転の表し方を紹介する．回転軸 $\boldsymbol{l}$ 周りの回転を考える．$\boldsymbol{l}$ の直交する二つのベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とすると，ベクトル $\boldsymbol{x}$ の回転は 2 回の鏡映の合成で与えられる．具体的には，まず，$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}$ に直交する平面に関して鏡映した位置を $\tilde{\boldsymbol{x}}$ とする．次に，$\tilde{\boldsymbol{x}}$ を $\boldsymbol{b}$ に直交する平面に関して鏡映した位置を $\boldsymbol{x}'$ とする．この鏡映操作によってノルムは変化しないし，$\boldsymbol{l}$ 自身は変化しないから，$\boldsymbol{x}'$ は $\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{l}$ の周りの回転である．計算規則などから $\tilde{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}^{-1}$ であるから，$\boldsymbol{x}'$ は次のように表せる．

$$\boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{b}\tilde{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{b}^{-1} = -\boldsymbol{b}(-\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}^{-1})\boldsymbol{b}^{-1} = (\boldsymbol{b}\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a})^{-1} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}' = \mathcal{R}\boldsymbol{x}\mathcal{R}^{-1}$$

(ここで，最後の同値変形では $\mathcal{R} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}$ とおいた．) このように作用する $\mathcal{R}$ を回転子とよぶ．

今後の課題

今回は代数幾何の入門としてベクトルなど慣れ親しんだものを扱ったが今後は多項式環などにも食わず嫌いせずに触れていきたい．ちなみに後で知ったのだがここまでの内容は“幾何学的代数”というものらしく結局のところ元々学ぼうとしていた“代数幾何”がなんなのかはいまだに分かっていない．

参考文献

[1]　金谷健一, 幾何学と代数系, 森北出版株式会社,2014.