$1+1=?$

BV18077　森田 泰成

令和元年 11 月 1 日

1　研究にあたって

数学に興味を持ち始めた高校生の頃に $1+1$ を証明するにはノート 1 冊かかるという記事をどこかで見かけた. その当時は何をどのように証明すればよいのかすらわからなかった. なのである程度知識を身に着けた今, 再度証明の概要でもつかめればと思った.

2　研究背景

算術の公理としてペアノの公理が有名であるが, 今回は同年代に活躍し, 集合論や論理学を研究していたデデキントの数における概念, その結果得られた算術の論理に沿って研究した.

3　準備

加法についての証明で必要となる集合と写像の概念の定義をはじめに行う.

定義 3.1　1. 集合をアルファベットの大文字, その元を小文字で表す.

2. 集合 S の元 s に対して写像 φ を定義する. 1 つの集合 S の写像 φ は, もし集合 S の相異なる要素 a, b がいつでも相異なる像

$$a' = \varphi(a),\ b' = \varphi(b)$$

に対応するならば**相似写像**だという.

3. もし $K' \subset K$ ならば K を**連鎖**という. A が S の勝手な部分集合とする. A を部分集合とする連鎖 (例えば S) のすべてをとり, それの共通集合を A_0 で表す.
4. 集合 S がそれ自身の真部分集合に相似なら**無限**であるといい, そうでない場合には S を**有限集合**であるという.
5. 1 つの集合 N は N を自分自身の中へ移す相似写像が存在して, その結果 N が $\varphi(N)$ に含まれない 1 つの要素の連鎖としてあらわれてくるとき, **単純無限集合**と呼ぶ. この要素を記号「**1**」で表す. このとき単純無限集合にはこの写像 φ によって**順序付けられる**という. 単純無限集合 N の本質は次の条件 α, β, γ, δ を満足する.

   α　$N' \subset N$

   β　$N = 1_0$

   γ　要素 1 は N' に含まれない.

   δ　写像 φ は相似である.

   数 n を順序付ける写像 φ によって作り出された像 n' を n に続く数とする.

定理 3.1　任意の集合 Ω の自分自身の中への任意の写像 θ と, そのほかに Ω の確定した 1 要素 ω が与えられていれば, 数系列 N の写像 ψ で, 条件

1. $\psi(N) \subset \Omega$
2. $\psi(1) = \omega$
3. $\psi(n') = \theta\psi(n)$

を満足するものが存在し, ただ 1 つに限る.

4　加法についての証明

定理 3.1 で述べた数系列 N の写像 ψ ので意義より確定した**関数** $\psi(n)$ を, この集合が数系列 N 自身であるという場合に適応する. この集合 Ω に対して, Ω のそれ自身の中への写像 θ がすでに考慮され, 写像 φ で N は単純無限集合に順序付けられている. そうすると $\Omega = N,\ \theta(n) = \varphi(n) = n'$ で

1. $\psi(N) \subset N$

となる. もし, N の写像 ψ が $\omega \neq 1$ で生成されるものとすれば, ω に対して 1 と相異なる数, すなわち N' に含まれる数 m' を選ぶこととなり, m 自身を任意の数とすると, 写像 ψ は m の選び方に依存しているため, 任意の数 n に対応する像 $\psi(n)$ を記号 $n+m$ で表し, この数を, 数 m に数 n を**加える**ことによって生じた**和**または m と n の和と名付ける. この**加法**は次の条件で余すところなく確定する. *1

2. $m + 1 = m'$
3. $m + n' = (m+n)'$

以上が加法における基本的な概念となる. この先の分配法則等の諸定理は紙面の都合上省略する.

5　結論

本テーマの結論は, 順序集合 N において 1 の次に続く数を **2** と定めるならば,

$$1 + 1 = 2$$

という等式が成立することになる.

6　今後の課題

哲学的な内容が多く, 完全には理解しきれない部分ができているが, 自分なりに整理をつけたい. 現代の集合論とは考え方が異なる点が多いため, その点についても思想の変遷にも手を付けていければと思う.

参考文献

[1] デーデキント著, 河野伊三郎訳, 数について-連続性と数の本質-, 岩波文庫, 2017 年.

[2] 足立恒雄著, 数とは何か, 共立出版, 2011 年.

*1 $\omega = 1$ とすればこれは N の合同写像となる。