グリーン関数

芝浦工業大学　数理科学研究会
BV18015 大岡舜明

2019 年 11 月 01 日

1　研究背景

境界面を調べていると, ある微分方程式について, 境界条件を設定した下で解くという問題と出会った. その中の斬新な手法に惹かれたのでこの場で紹介をしたい.

2　グリーン関数とは何か

まず, 区間 $[a,b]$ で定義された次の非同次のスツルム・リュービル型常微分方程式 :

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{du(t)}{dt}\right) - q(t)u(t) = f(t) \tag{1}$$

を考える. 上の方程式は一般の 2 階線形常微分方程式を変形すると得られる. ただし $p(t) > 0$ であり, さらに $p(t), q(t)$ は区間 $[a,b]$ で連続かつ微分可能とする. ここで L を

$$L \equiv \frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{d}{dt}\right) - q(t) \tag{2}$$

と置くと, 式 (1) は $L[u(t)] = f(t)$ と置き換えられる. また, 境界条件

$$B_a \equiv p(a)u'(a)\sin\alpha - u(a)\cos\alpha = 0 \tag{3}$$

$$B_b \equiv p(b)u'(b)\sin\beta - u(b)\cos\beta = 0 \tag{4}$$

の下で解を求める. さて (1) を (2),(3) の下で解く際に, 直接式 (1) のみを扱わないで, 入力 $f(t)$ をインパルス, 即ち次のようにデルタ関数とした次式 :

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dG(t,\xi)}{dt}\right) - q(t)G(t,\xi) = \delta(t-\xi) \tag{5}$$

を使うとする. (5) について (2) を用いて書き直すと

$$L[G(t,\xi)] = \delta(t-\xi)$$

両辺に $f(\xi)$ をかけて a から b まで ξ について積分すると

$$\int_a^b L[G(t,\xi)]f(\xi)d\xi = \int_a^b f(\xi)\delta(t-\xi)d\xi$$

上辺右辺は $\delta(t)$ 関数の性質から $f(t)$ となる. 左辺は L が線形作用素であり, それは積分と交換できるので, 結局

$$L\left[\int_a^b G(t,\xi)f(\xi)d\xi\right] = f(t)$$

が得られる. 元の式は $L[u(t)] = f(t)$ であるから, $u(t)$ は

$$u(t) = \int_a^b G(t,\xi)f(\xi)d\xi \tag{6}$$

で与えられ, $G(t,\xi)$ は同じ境界条件 $B_a = 0, B_b = 0$ を満たし, かつ

$$L[u] = L[G(t,\xi)] = (pG')' - qG = \delta(t-\xi)$$

を満足する.
このとき, 次の性質を持つ $G(t,\xi)$ を方程式 $L[u] = f$ の境界条件 $B_a = 0, B_b = 0$ の下におけるグリーン関数と定義される.

性質

1. 区間 $[a,b]$ で G は連続である : $G(t-0,t) = G(t+0,t)$
2. $t \neq \xi$ のとき, 次式を満たす:$(pG')' - qG = 0, B_a = 0, B_b = 0$
3. t に関する導関数が $t = \xi$ で $\frac{1}{p}$ の跳びを持つ. すなわち $G'(t+0,t) - G'(t-0,t) = \frac{1}{p(t)}$

このようなグリーン関数求めるには多くのやり方があるが, よく使う手はフーリエ級数展開である. グリーン関数が決定すれば, 求めたい $u(t)$ を (6) 式から導出できる.

3　今後の課題

グリーン関数についてごく簡単に説明したが, このポスター 1 枚ではまだまだ説明が足りないので, より詳しくは資料を見て貰いたい. 具体的な $G(t,\xi)$ を記述しながら説明できたらと思う.

参考文献

[1] 物理・工学のためのグリーン関数入門　松浦武信・吉田正廣・小泉義晴　東海大学出版会　2000 年.