C^∞ 多様体と C^∞ 級写像

芝浦工業大学 数理科学研究会
bv18079 山岡史弥

令和元年 11 月 1 日

1 研究背景

可微分多様体はおおざっぱに言えば, 各点の近傍にパラメーターの導入されるような位相空間であって, 相ことなる二つのパラメーターの間の変換が微分可能な関数となっているようなものである. このような位相空間の上の関数は局所的にはこれらのパラメーターの関数と考えられる. 微分の概念を用いることで, 多様体の一点のごく小さい近傍を線形化して接ベクトル空間を考えることができる.

2 多様体の定義について

位相空間 X の開集合 R から m 次元数空間 $\mathbb{R}^m$ のある開集合 R' への同相写像が存在するとき R と R' の対 (R, R') を m 次元座標近傍といい,R' を R 上の局所座標系という.

(R, ϕ) を位相空間内の座標近傍とする.R 内の任意の点 p に対して $\phi(p)$ は R' の点なので

$$\phi(p) = (x^1, \ldots, x^m)$$

と書ける. また, $(x^1, \ldots, x^m)$ を (R, ϕ) に関する p の局所座標という.

定義 2.1. 位相空間 M が次の条件

(1) M はハウスドルフ空間である

(2) M の任意の点 p について p を含む m 次元座標近傍 (R, ϕ) が存在する

を満たすとき M を m 次元多様体という.

このようにして多様体というのは好きなところに局所座標系が書けるような空間であることがわかる.

3 簡単な多様体の例

3.1 R^m は m 次元 C^∞ 級多様体である

これは自明であるが、U=R^m, $\phi = \mathrm{id} : R^m \to R^m$ で定義される $(R.\phi)$ をただひとつの座標近傍とする C^∞ 級座標近傍系があると考えれば良い。

3.2 S^m は m 次元 C^∞ 級多様体である

S^m が m 次元 C^∞ 級多様体である事を確かめる. まず, R^{m+1} はハウスドルフ空間であるからその部分空間として S^m もハウスドルフ空間である。

次に, 任意の点について, その点を含む座標近傍が存在することを示せば良い. S^m の 2(m+1) 個の開集合 $U_+(i = 1, 2, \ldots, m + 1)$, $U_-(i = 1, 2, \ldots, m + 1)$ を定義すればよい。

4 今後の課題へ向けて

今後は, 微分可能多様体について見極め例えば積多様体について調べていきたい.

参考文献

[1] 松本幸夫, 基礎数学 5「多様体の基礎」, 東京大学出版会, 2018.

[2] 松島与三, 数学選書 5 多様体入門, 精興社, 2017.