拡張ピタゴラスの定理

芝浦工業大学　数理科学研究会
BV17077　横井　健
令和元年年 11 月 1 日

研究動機

多様体を学習していたとき統計と絡めて何ができるか気になり調べていたとき情報幾何学を見つけ学習したいと思い, 学習を始めたところ, 導入にダイバージェンスやリーマン計量といった内容があり, そこから取り掛かった. 今回は, 多様体上に一般化されたピタゴラスの定理について述べる.

1　準備

まず, 今回の発表で必要な定義, 定理を確認する.

定義 1.1 (多様体)**.** 集合 M が以下の条件を満たすとき, M を n 次元 C^r 級 (可微分) **多様体**という.

i) M は Hausdorff 空間.

ii) 適当な集合 A を添え字集合とする M の開集合の族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ と写像 $\psi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ の族 $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ があって, 以下の 3 条件を満たす.

1) $M = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$

2) 各 $\alpha \in A$ に対し, 像 $\psi(U_\alpha)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合で, $\psi_\alpha : U_\alpha \to \psi_\alpha(U_\alpha)$ は同相写像.

3) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ならば, 写像 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は C^r 級.

上記で定義した多様体に対して計量的な性質として, **ダイバージェンス**という関数. 2 点の関数を考える.

定義 1.2 (ダイバージェンス)**.** 次の 3 条件を満たす 2 点関数 $D[P : Q]$ をダイバージェンスとよぶ.

i) $D[P : Q] \geq 0$

ii) $P = Q$ のとき, このときに限り, $D[P : Q] = 0$

iii) P 点と Q 点が近いとし, それぞれの座標を, $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}$ とする. このとき, $D[\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\xi}]$ をテイラー展開すると,

$$D[\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\xi}] = \frac{1}{2} \sum g_{ij}(\boldsymbol{\xi}) d\xi_i d\xi_j \tag{1.1}$$

と 2 次の項が最初に出るのが, 行列

$$G(\boldsymbol{\xi}) = (g_{ij}(\boldsymbol{\xi}))$$

は正定値対象である.

D は微分可能.

また, ダイバージェンス関数[1]からは, 微小な 2 点 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\xi}$ の間に二乗距離

$$ds^2 = 2D[\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\xi}] = \sum g_{ij}(\boldsymbol{\xi}) d\xi_i d\xi_j$$

が導入され, 空間の各点 $\boldsymbol{\xi}$ に正定値行列 $G = (g_{ij})$ が定義される. 微小線素 $d\boldsymbol{\xi}$ の長さの二乗が上式で与えられる空間を**リーマン空間**という. また, 1 点 $\boldsymbol{\xi}$ の近傍で線形空間で近似した空間を接空間 $T_{\boldsymbol{\xi}}$ といい, 点 $\boldsymbol{\xi}$ から出る微小ベクトル $d\boldsymbol{\xi}$ はベクトル空間 $T_{\boldsymbol{\xi}}$ に属すると見れる. 座標軸に沿った接方向のベクトルを基底ベクトルとし, 第 i 方向の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_i$ とすると, $d\boldsymbol{\xi} = \sum d\xi_i \boldsymbol{e}_i$ と表記できる.

さらに, ベクトルの長さはベクトル空間に内積が定義されれば定まり, 線素 $d\boldsymbol{\xi}$ の長さ ds の二乗は,

$$ds^2 = \langle d\boldsymbol{\xi}, d\boldsymbol{\xi} \rangle = \langle \sum d\xi_i \boldsymbol{e}_i, d\xi_i \boldsymbol{e}_i \rangle$$

と書ける. 接空間のベクトル $\boldsymbol{X}$ の長さの二乗は

$$\|\boldsymbol{X}\|^2 = \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle = \sum g_{ij} X_i X_j$$

である.

上記の定義から測地線と双対測地線を導くがここではスペースの都合上省かせてもらう.

2　拡張ピタゴラスの定理

凸関数をもとに多様体にダイバージェンスと 2 種類の測地線を定義し, 双対平坦な空間を導き, さらにリーマン計量が定義されて, 2 つの線の直交性も判定できる. これ等のことから双対平坦空間においてもピタゴラスの定理や射影写像が成立する.

3 点 P, Q, R を考える. P と Q を結ぶ双対測地線が Q と R を結ぶ測地線と直交しているする. P と R を結ぶ必要はないが, これを結べば, 双対空間における直角三角形が出来る.

定理 2.1. 双対平坦空間における直角三角形において, 拡張ピタゴラスの定理が成立する. すなわち,

$$D[P : R] = D[P : Q] + D[Q : R]$$

となる.

発表では拡張ピタゴラスの定理の導出とその応用を話す.

今後の課題

今回拡張ピタゴラスの定理とその周辺のことに対して学習したが今後は今回では触れられなかった情報幾何学の応用まで取り掛かりたい.

参考文献

[1] 甘利 俊一 著, 情報幾何学の新展開, サイエンス社, 2014 年.

[1] 資料参考されたし.