特殊相対性理論と Maxwell 方程式

豊嶋 祐人

芝浦工業大学 数理科学研究会

2019/11/2

目次

特殊相対性理論の出来

電磁波の媒質として当時考えられていたエーテルを検出するための **Michelson-Morley** の実験は失敗に終わったが, エーテルの存在を擁護しつつこの実験結果を説明するために **Lorentz** は以下の仮説を提唱した.

Lorentz の収縮仮説

エーテル中を速度 v で運動する物体はその長さが $\sqrt{1-(v/c)^2}$ 倍に収縮する.

実際, この収縮を認めれば **Michelson-Morley** の実験結果を説明づけることはできるが, (人々が納得するような) この収縮の説明はまだ当時は存在しなかった.

特殊相対性理論の出来

ここで **Lorentz** は **Galilei** 変換に対して運動方程式が共変であるのに対し, **Maxwell** 方程式が共変でないことに気づく. 物体が荷電粒子の集まりであることを考えればこれは矛盾であるから, **Lorentz** は **Maxwell** 方程式を共変に保つ慣性系間の座標変換として以下の **Lorentz** 変換を提唱した.[1]

Lorentz 変換

K 系における事象 (x^0, x^1, x^2, x^3) は K' 系 (K 系に対して x^1 方向に速度 V で移動する慣性系) からは以下のように見える.

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0), \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3$$

$$(\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta \equiv V/c)$$

[1] ちなみに慣性系間でこれらと同様に変換される 4 組の物理量を 4 元ベクトル (4-vector) と呼び, x^i $(i = 0, 1, 2, 3)$ を 4 元座標と呼ぶ.

特殊相対性理論の出来

さらに **Einstein** は **Lorentz** 変換は以下の要請から導かれると主張し, これらをもとに特殊相対性理論を構築した.

特殊相対性理論の基本要請

- 特殊相対性原理 ··· すべての慣性系において物理法則は同じ形で書かれる.
- 光速不変の原理 ··· すべての慣性系において光速は不変である.

4 元電流密度

点電荷 q の電荷密度と電流密度は以下で表される.[2][3]

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = q\delta(x-v_x t)\delta(y-v_y t)\delta(z-v_z t), \quad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{v}\rho(\boldsymbol{r},t)$$

まず, 慣性系間の変換について以下が成り立つ.

$$x - v_x t = \gamma\left((x'+Vt') - v_x\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right)\right) = \gamma\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)(x' - v_x' t')$$

同様に y と z についても計算すれば以下を得る.

$$\delta(x-v_x t) = \frac{1}{\gamma\left(1 - Vv_x/c^2\right)}\delta(x'-v_x' t'), \quad \delta(y-v_y t) = \delta(y'-v_y' t'), \quad \delta(z-v_z t) = \delta(z'-v_z' t')$$

よって電荷密度の変換則は $\rho' = \gamma(1 - Vv_x/c^2)\rho$ であるから以下を得る.

$$j'^0 = \gamma(j^0 - \beta j^1), \quad j'^1 = \gamma(j^1 - \beta j^0), \quad j'^2 = j^2, \quad j'^3 = j^3 \quad (j^0 \equiv c\rho)$$

これらは 4 元ベクトルであるから 4 元電流密度 **(4-current)** と呼ばれる.

---

[2] このときの点電荷は初期位置が原点で等速度 $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ で運動する場合を想定している.

[3] デルタ関数の積分値が 1 であり, $\delta(ax) = \delta(x)/a$ $(a \in \boldsymbol{R})$ が成り立つことを既知のものとする.

広義の Lorentz 変換

狭義の **Lorentz** 変換では $(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2=0$ が常に成り立つから, $(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2$ を保つ **4** 元ベクトルの線形変換を広義の **Lorentz** 変換とする.[4]
よって通常の空間回転も **Lorentz** 変換であるから, 任意の方向への **Lorentz** 変換を考えることができる.

[4] このことは特殊相対性理論の基本要請と矛盾しない.

数ベクトル空間上のテンソル代数

K 上の線形空間 V に対して V から K への線形写像全体の集合は線形空間であり, これを V の双対空間 **(dual space)** と呼ぶ.
ここで V の元を反変ベクトルと呼び, その双対空間 V^* の元を共変ベクトルと呼ぶ.
以降, $\mathbb{R}^n$ について考える.
反変ベクトルの基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ と共変ベクトル f に対して $f_i \equiv f(\boldsymbol{e}_i)$ を並べてできる数ベクトルは f を特徴づける. これを共変ベクトル f の成分 **(component)** と呼ぶ.
基底の変換にともなって反変ベクトルの成分は対照的に変換され, 共変ベクトルの成分は同様に変換される.
また, $\phi_i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ を満たす $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ は双対空間の基底であり, これを双対基底 **(dual basis)** と呼ぶ.
よって双対空間 $\mathbb{R}^{3^*}$ からスカラー全体の集合 $\mathbb{R}$ への線形写像に対して同様に数ベクトルを構成すれば, その成分は反変ベクトルの性質をもつ. すなわち, 反変ベクトルと共変ベクトルは双対概念である.

数ベクトル空間上のテンソル代数

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への双線形写像を **2** 階の共変テンソルと呼び, ${\mathbb{R}^3}^* \times {\mathbb{R}^3}^*$ から $\mathbb{R}$ への双線形写像を **2** 階の反変テンソルと呼ぶ.[5]
2 階の共変テンソル f の成分を $f_{ij} \equiv f(e_i, e_j)$ で定めればこれらは f を特徴づけるし, 反変テンソルの成分も同様である.
ここで基底の変換にともなって反変テンソルの成分は対照的に変換され, 共変テンソルの成分は同様に変換される.
一般に $\mathbb{R}^3 \times \cdots \times \mathbb{R}^3 \times {\mathbb{R}^3}^* \times \cdots \times {\mathbb{R}^3}^*$ から $\mathbb{R}$ への多重線形写像を r 階反変と s 階共変の混合テンソルと呼び, 以降では (r, s) テンソルと呼ぶ.

[5] もちろん, 一般の線形空間に拡張されてもよい.

計量テンソル

内積空間 V において内積は **2** 階の共変テンソルである.
このときのテンソルを計量テンソル **(metric tensor)** と呼び, $\mathbb{R}^3$ の計量テンソルは以下である.

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで, 反変ベクトル v^μ に対して $v_\mu \equiv g_{\mu\nu} v^\nu$ $(\mu = 1, 2, 3)$ は成分の変換より共変ベクトルである. これを反変ベクトルの共変成分 **(covariance component)** と呼ぶ.
同様に反変テンソル $f^{\mu\nu}$ に対して $f_{\mu\nu} \equiv g_{\alpha\beta} f^{\mu\alpha} f^{\nu\beta}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3)$ は成分の変換より共変テンソルである. これを反変テンソルの共変成分と呼ぶ.

Minkowski 空間

反変ベクトルどうしの内積 **(inner product)** を $<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>\equiv u^0v^0-u^1v^1-u^2v^2-u^3v^3$ で定めれば, 計量テンソルは以下のように表される.[6]

$$(g_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

このような内積空間を **Minkowski** 空間と呼び, 広義の **Lorentz** 変換は $x^\mu x_\mu=\text{const.}$ を満たす線形変換である.[7][8]

[6] この内積は正定値でないから, 正確には拡張された内積である. (これを不定な内積と呼ぶ.)
[7] x_μ は x^μ の共変成分である. すなわち, $x_\mu\equiv g_{\mu\nu}x^\nu$.
[8] すなわち, 広義の Lorentz 変換とは Minkowski 空間においてノルムを不変に保つ線形変換である.

Maxwell 方程式のポテンシャル表現

場とポテンシャルの関係式は (磁場に関する)**Gauss** の法則と電磁誘導則に由来したから, 残りの **Maxwell** 方程式をポテンシャルを用いて書き換える.
まず, 以下の条件を課す.[9]

$$\textbf{Lorentz 条件 (Lorentz condition)} : \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = 0$$

これを用いれば **Maxwell** 方程式は以下の **3** つで書かれる.

$$\Box\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \mu_0 \boldsymbol{j} = \Box\boldsymbol{A}, \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = 0 \quad \left(\Box \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)$$

[9] この条件は (電荷の保存則はもたらすが) 古典電磁気学と矛盾する結果をもたらさない.

Maxwell 方程式のポテンシャル表現

ここで, 反変ベクトルによる偏微分は **Lorentz** 変換と対称的に変換されるから共変ベクトルの性質をもち, これを ∂_μ と表記する.[10]

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \overline{\Lambda}^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

同様に共変ベクトルによる偏微分は反変ベクトルの性質をもつから, これを ∂^μ と表記する.

よって 4 元ポテンシャル **(4-potential)** $A^\mu \equiv (\phi/c, \boldsymbol{A})$ を用いれば, **Maxwell** 方程式は以下の形で書かれる.[11]

Maxwell 方程式の電磁ポテンシャルによる表現

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu = \mu_0 j^\mu \ \ (\mu = 0, 1, 2, 3), \qquad \partial_\mu A^\mu = 0$$

[10] Lorentz 変換は $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)(\Leftrightarrow x^\nu = \overline{\Lambda}^\nu_\mu x'^\mu$ $(\nu = 0, 1, 2, 3))$ で表記されるものとする.

[11] Maxwell 方程式の Lorentz 共変性より, 4 元ポテンシャルは反変ベクトルである.

電磁場テンソル

2 階の交代反変テンソル $f^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ は以下のように **4** 元ポテンシャルと電磁場の関係を表すテンソルであるから, 電磁場テンソル **(electromagnetic field tensor)** と呼ばれる.

$$(f^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

実際, 各成分は以下のように計算される.

$$f^{0k} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^k + \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\phi}{c} = \frac{1}{c}\left(\mathrm{grad}\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)_k = -\frac{1}{c}E^k \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$f^{kl} = \partial_l A^k - \partial_k A^l = \epsilon_{mlk} B^m \quad (k, l = 1, 2, 3,\ k \neq l)$$

電磁場の変換則

(狭義の)**Lorentz** 変換に伴って電磁場テンソルは $(f'^{\rho\sigma}) = (\Lambda^{\rho}_{\mu})(f^{\mu\nu})^{t}(\Lambda^{\sigma}_{\nu})$ のように変換されるから以下を得る.

$$(f'^{\rho\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -\gamma(E_y/c - \beta B_z) & -\gamma(E_z/c + \beta B_y) \\ E_x/c & 0 & -\gamma(B_z - \beta E_y/c) & \gamma(B_y + \beta E_z/c) \\ \gamma(E_y/c - \beta B_z) & \gamma(B_z - \beta E_y/c) & 0 & -B_x \\ \gamma(E_z/c + \beta B_y) & -\gamma(B_y + \beta E_z/c) & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

よって, 同一の事象における慣性系間の電磁場の関係式を得る.

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - VB_z), \quad E'_z = \gamma(E_z + VB_y)$$
$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B_y + V/c^2 E_z), \quad B'_z = \gamma(B_z - V/c^2 E_y)$$

参考文献

- 江沢 洋, 相対性理論, 裳華房, 2008.
- 田代 嘉宏, テンソル解析, 裳華房, 2006.