変分法と解析力学

豊嶋 祐人

芝浦工業大学 数理科学研究会

2019/11/1

はじめに

解析力学と呼ばれる古典力学の形式では **Newton** の **3** 法則ではなく最小作用の原理を運動の基本原理として採用する**.** それを解説するためにはまず変分法 **(calculus of variations)** に触れる必要があるから序盤ではそれを解説する**.**

目次

変分法

関数を元とする線形ノルム空間を関数空間 **(function space)** と呼び, 関数空間から $\mathbb{R}$ への写像を汎関数 **(functional)** と呼ぶ.
ここで連続かつ線形である汎関数を線形汎関数と呼び, ある汎関数に対して極限操作などを扱うためにはそれに応じて適当な関数空間を選べばよい.
一般に汎関数 $J[y]$ に対して $\Delta J[h] \equiv J[y+h] - J[y]$ は許容関数 $h(x)$ の非線形汎関数であり, この主線形項を $J[h]$ の変分 **(variation)** と呼ぶ. [1][2]
また, $y = \hat{y}$ で変分が **0** である汎関数は $\hat{y}$ で停留するという.

---

[1] すなわち, $\|h\| \to 0$ であるとき $\varepsilon \to 0$ を満たす $\varepsilon > 0$ を用いれば $\Delta J[h] = \delta J[h] + \varepsilon\|h\|$ である.
[2] 変分は線形汎関数であるから線形性をもつ.

変分法

汎関数の極値

$J[y]-J[\hat{y}]$ が曲線 $\hat{y}(x)$ の近傍で同符号であるとき, $J[y]$ は $\hat{y}(x)$ で極値をとるという.
ただし, 微分可能な関数からなる集合上で定義される汎関数に対して, この始域の関数は $\mathcal{C}$ の元とも $\mathcal{D}_1$ の元とも考えられるから汎関数の極値には以下の 2 種類が存在する.
・$\|y-\hat{y}\|_1<\varepsilon$ を満たす $y\in\mathcal{D}_1$ に対して $J[y]-J[\hat{y}]$ が同符号であるとき, 汎関数 $J[y]$ は $\hat{y}$ で弱極値 (weak extrema) をとるという.
・$\|y-\hat{y}\|_0<\varepsilon$ を満たす $y\in\mathcal{C}$ に対して $J[y]-J[\hat{y}]$ が同符号であるとき, $J[y]$ は $\hat{y}$ で強極値 (strong extrema) をとるという.
ここで, 明らかに強極値点は弱極値点である.

ここで, 汎関数の極値点は停留点である. (証明は控える.)

変分法の基本問題

ここで, 以下の問題を考える.

変分法の基本問題

汎関数 $J[y] \equiv \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx$ が境界条件 $y(a) = A$, $y(b) = B$ を満足するとき, $J[y]$ の極値を求めよ.

このとき, 停留曲線を $\hat{y}(x)$ としたときの $J[\hat{y}]$ は **Euler** 方程式と呼ばれる微分方程式を満たし, それは以下のように導出される.

変分法の基本問題

まず, $\Delta J = J[y+\delta y] - J[y]$ は以下である.

$$\begin{aligned}
\Delta J &= \int_a^b F\left(x, y+\delta y, y'+\delta y'\right) dx - \int_a^b F\left(x, y, y'\right) dx \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{dx}\delta y\right) dx + \cdots \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right) dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_a^b + \cdots \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \delta y \, dx + \cdots
\end{aligned}$$

よって, 停留曲線に対して以下が成り立つ.

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \delta y \, dx = 0$$

このとき, 以下の補題は非常に有用である.

変分法の基本問題

変分法の基本補題

連続関数 $\alpha(x)$ と $h(a) = h(b) = 0$ を満たす $h(x) \in C\ (a \le x \le b)$ に対して $\int_a^b \alpha(x)h(x)dx = 0$ であるならば, $\alpha(x) = 0$ が成り立つ.

よって, 以下が成り立つ.

Euler 方程式

$\delta y(a) = \delta y(b) = 0$ を満たす関数 $y(x)$ の集合上で定義される汎関数 $J[y] \equiv \int_a^b F(x, y, y')dx$ が停留することとこの関数 $y(x)$ が **Euler** 方程式

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

を満たすこととは同値である.

変分法の応用例

以下は変分法の代表的な応用例である.

(例)

1. 直線の最短性
2. 最速降下線問題
3. 懸垂線の方程式
4. 等周問題
5. 測地線問題

解析力学とは

解析力学 **(Analytical mechanics)** とは **Newton** 力学を再構成した力学体系であり**, Lagrange** によって創始された**. Newton** の **3** 法則ではなく最小作用の原理を運動の基本原理として採用している**.**

仮想仕事の原理とその動力学への拡張

まず, 静力学では物体にかかる合力 $\boldsymbol{F}$ が 0 であることから, 仮想変位 $\delta\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{x}=0$ が成り立つ. (仮想仕事の原理 **(principle pf vertual work)**)
ここで, **Newton** 力学によれば動力学では運動方程式 $\boldsymbol{F}-m\ddot{\boldsymbol{x}}=0$ が成り立つから $\boldsymbol{F}$ の反対方向に $m\ddot{\boldsymbol{x}}$ だけ力がかかっているような慣性系をとれば, 動力学を静力学と同様に扱うことができる.[3]
よって, 仮想仕事の原理は以下のように拡張される.

仮想仕事の原理の動力学への拡張

すべての力学に対して $(\boldsymbol{F}-m\ddot{\boldsymbol{x}})\cdot\delta\boldsymbol{x}=0$ が成り立つ.

[3] この着想を, d'Alembert の原理と呼ぶ.

最小作用の原理

いま, 物体にかかっている力が保存力であるとすれば $\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\ U$ が成り立つから仮想仕事の原理はポテンシャルの停留 $\delta U = 0$ に帰着される.
ここで, 前述した仮想仕事の原理の拡張式がある物理量 S の停留に帰着されれば, 物体の運動は S が停留するように決まるということができる.[4]
保存力に対して仮想仕事の原理の拡張式は以下のように変形される.

$$
\begin{aligned}
(F_i - m\ddot{\boldsymbol{x}}) \cdot \delta\boldsymbol{x} = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\boldsymbol{x}}}\right)\left(\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 - U(\boldsymbol{x})\right) \cdot \delta\boldsymbol{x} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{x}}}\right) \cdot \delta\boldsymbol{x} = 0 \quad \left(L \equiv \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 - U(\boldsymbol{x})\right)
\end{aligned}
$$

よって $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{x}}}\right) \cdot \delta\boldsymbol{x}\ dt = 0$ が成り立つから汎関数 $S \equiv \int_{t_0}^{t_1} L\ dt$ は停留する.

[4]以下では, 簡単のために一般化座標 (generalized coordinates) を導入せずに通常の座標のみを扱う.

最小作用の原理

よって, 以下が成り立つ.

最小作用の原理 (principle of least action)

2 つの時刻 $t = t_1$ と $t = t_2$ $(t_1 < t_2)$ における $\boldsymbol{x}$ の値を指定したとき, $t_1 < t < t_2$ における系の運動, すなわち時間の関数 $\boldsymbol{x}(t)$ は

$$\text{作用 } (action) : S[x] = \int_a^b L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)\, dt$$

が停留するように決まる.

ここで, L は $L \equiv T - U$ (T は運動エネルギー, U はポテンシャル) で定義される **Lagrangian** と呼ばれる量である.
また, 作用の停留に対する **Euler** 方程式を **Lagrange** 方程式と呼び, **Lagrange** 方程式は運動方程式に対応する.

Lagrangian の不変性

Lagrangian には $L \to L' = L + \frac{d}{dt}G$ だけの自由度がある.
ここで一般化座標を $q_i(t) \to q_i(t) + F_i^A \epsilon_A$ と変化させたとき, **Lagrangian** が (時間に関する全微分項を除いて) 不変であるならば, それに付随して **Noether** 不変量と呼ばれる保存量が得られる.[5]
実際, 式変形の一部に **Lagrange** 方程式を用いれば以下が成り立つ.

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_i} F_i^A \epsilon_A + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{dF_i^A}{dt} \epsilon_A = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} F_i^A \epsilon_A \right)$$

よって **Lagrangian** の変化量を $\dfrac{d}{dt} G^A \epsilon_A$ とすれば, 以下の不変量を得る.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} F_i^A - G^A$$

[5] index$A$ は変換の種類を表し, 縮約規則に則って和をとっている. また, q と q' の関数 F_i^A は座標の変化を定義する量であり, ϵ_A は微小変換パラメータである.

Hamilton 形式

Lagrangian の変数である速度を運動量に **Legendre** 変換した
$H(q_i, p_i, t) = p_i\dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)$ を **Hamiltonian** と呼び, **Hamiltonian** はエネルギーと対応する.
ここで, **Hamiltonian** を用いて作用の変分を計算すれば, 以下のようになる.

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} ((p_i + \delta p_i)(\dot{q}_i + \delta\dot{q}_i) - H(q_i + \delta q_i, p_i + \delta p_i, t) - p_i\dot{q}_i + H(q_i, p_i t))\, dt \\
&\simeq \int_{t_1}^{t_2} \left((p_i\delta\dot{q}_i + \dot{q}_i\delta p_i) - \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i \right) \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta q_i \left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \delta p_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \right) dt + [p_i\delta q_i]_{t_1}^{t_2}
\end{aligned}$$

よって, 作用の停留より以下の正準方程式 **(canonical equations)** を得る.

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

参考文献

- I.M. Gelfand, S.V.Fomin, 変分法, 総合図書, 1975.
- 前野 昌弘, よくわかる解析力学, 東京図書, 2017.
- 畑 浩之, 基幹講座物理学 解析力学, 東京図書, 2014.