幾何学的代数
～代数幾何に向けて～

加藤諒

芝浦工業大学 数理科学研究会

2019/11/2

研究背景

現代社会を生きていくからには，現代数学を学ぶべきである．そんな中，ある先生から代数幾何の勉強をすることを勧めていただき，今回のテーマとすることにした．本発表では，“ 代数幾何 ”の入門書の中でも図書館で見つけて惹かれた数学書 **[1]** の内容を紹介する．この本では，“ 代数幾何 ”の題材として様々な代数系とその代数系における演算の幾何的な解釈が説明されており，抽象的で解釈の難しい代数学と幾何学のつながりや違いを学ぶことができると考えた．

発表の概要

研究内容

四元数代数系
グラスマン代数系
クリフォード代数系

研究発表

四元数代数系
(グラスマン代数系)
(クリフォード代数系)

Definition (代数系 (algebra))

ベクトル空間に結合則を満たす積が定義され，積に関して閉じているとき，すなわち任意の元の積がそのベクトル空間に属しているとき，その空間は代数系であるという．

Definition (四元数 (qusternion))

四つの実数 q_0, q_1, q_2, q_3 を，記号 i, j, l を用いて

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

と表したものを四元数という．また，四元数全体は以下の法則を満たすとする．

(1) 交換則 $a + b = b + a$

(2) 結合則 $(a + b) + c = a + (b + c)$

(3) 分配則 $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$, $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$

四元数の導入

$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ と異なる四元数を

$$q' = q'_0 + q'_1 i + q'_2 j + q'_3 k$$

とすると，例えば $2q + 3q'$ は次のようになる．

$$2q + 3q' = (2q_0 + 3q'_0) + (2q_1 + 3q'_1)i + (2q_2 + 3q'_2)j + (2q_3 + 3q'_3)k$$

このように表されることを四元数全体が基底 $\{1, i, j, k\}$ の生成する 4 次元ベクトル空間であるという．

四元数の導入

注意

和 $+$ は集合を表しているに過ぎず，実数と虚数を足して別の何かになるわけではない．このような和を形式和という．

四元数の積

さらに i, j, k 間の積を考え，形式和を交換則，結合則，分配則によって展開すれば，積は最終的には記号 i, j, k の間に帰着する．そこで次のように定義する．

$$i^2 = -1\ ,\ j^2 = -1\ ,\ k^2 = -1 \tag{1}$$

$$jk = i\ ,\ ki = j\ ,\ ij = k\ ,\ kj = -i\ ,\ ik = -j\ ,\ ji = -k \tag{2}$$

(1) は i, j, k それぞれが虚数単位になっていることを意味している．(2) は $\{i, j, k\}$ を正規直交基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ とみなせば，ベクトル積 (クロス積) と同じ規則に従うことを示している．また，(2) から分かるように四元数の積は可換でない．

四元数積

式 (1), (2) から，上述の 2 つの四元数 $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ と $q' = q'_0 + q'_1 i + q'_2 j + q'_3 k$ の積 (四元数積) は次のようになる．[1]

$$\begin{aligned} qq' =& (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)(q'_0 + q'_1 i + q'_2 j + q'_3 k) \\ =& (q_0 q'_0 - q_1 q'_1 - q_2 q'_2 - q_3 q'_3) + (q_0 q'_1 + q_1 q'_0 + q_2 q'_3 - q_3 q'_2) i \\ & + (q_0 q'_2 + q_2 q'_0 + q_3 q'_1 - q_1 q'_3) j + (q_0 q'_3 + q_3 q'_0 + q_1 q'_2 - q_2 q'_1) k \qquad (\star) \end{aligned}$$

四元数積

式 $(\star)$ は四元数が積で閉じていることを表している．また，式 $(\star)$ と同様に計算すれば

$$(qq')q'' = q(q'q'')$$

がわかる．[1]

四元数代数系

以上と代数系の定義から，四元数全体は代数系である.

四元数代数系

以上と代数系の定義から，四元数全体は代数系である．
また，四元数 $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ について次がいえる．

四元数代数系

以上と代数系の定義から，四元数全体は代数系である．
また，四元数 $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ について次がいえる．
$q_1 = q_2 = q_3 = 0$ のとき $q = q_0$ であり， $q_0 \in \mathbb{R}$ より，四元数は実数の拡張である．

四元数代数系

以上と代数系の定義から，四元数全体は代数系である．
また，四元数 $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ について次がいえる．
$q_1 = q_2 = q_3 = 0$ のとき $q = q_0$ であり， $q_0 \in \mathbb{R}$ より，四元数は実数の拡張である．
$q_0 = 0$ のとき $q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ であり，これをベクトル $q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_2 e_2$ とみなせば，四元数は 3 次元ベクトルの拡張である．

これらから，四元数 q の q_0 を四元数 q のスカラー部分，$q_1 i + q_2 j + q_3 k$ を四元数 q のベクトル部分とよぶ．q のスカラー部分を α，ベクトル部分を $\boldsymbol{a}$，同様に q' のスカラー部分を β，ベクトル部分を $\boldsymbol{b}$ とすると q, q' はそれぞれ次のように表せる．

$$q = \alpha + \boldsymbol{a}\ ,\ q' = \beta + \boldsymbol{b}$$

四元数代数系

これを用いると式 (⋆) は次のように言い換えることができる. [2]

$$qq' = (\alpha + \boldsymbol{a})(\beta + \boldsymbol{b}) = (\alpha\beta - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) + \alpha\boldsymbol{b} + \beta\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \tag{3}$$

ただし, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ と $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\{i, j, k\}$ を正規直交基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ とみなして計算している.

四元数代数系

これを用いると式 (⋆) は次のように言い換えることができる．[2]

$$qq' = (\alpha + \boldsymbol{a})(\beta + \boldsymbol{b}) = (\alpha\beta - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) + \alpha\boldsymbol{b} + \beta\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \tag{3}$$

ただし，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ と $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\{i, j, k\}$ を正規直交基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ とみなして計算している．上の式より，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を四元数とみなした積 $\boldsymbol{ab}$ が内積とベクトル積を同時に計算していることが分かる．

Definition (共役四元数)

$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ の共役四元数 $q^\dagger$ を次のように定義する.

$$q^\dagger = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$$

Definition (共役四元数)

$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ の共役四元数 $q^\dagger$ を次のように定義する.

$$q^\dagger = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$$

定義から明らかなように，共役四元数の共役四元数はもとの四元数である.

共役四元数

(3) からスカラー部分，ベクトル部分に気をつければ

$$(qq')^{\dagger} = (\alpha\beta - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) - \alpha\boldsymbol{b} - \beta\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \tag{4}$$

となる．

また，同様に考えると $q = \alpha - \boldsymbol{a}$，$q' = \beta - \boldsymbol{b}$ であるから

$$q'^{\dagger} q^{\dagger} = (\alpha\beta - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) - \alpha \boldsymbol{b} - \beta \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \tag{5}$$

以上，式 (4),(5) から次が分かる.

$$q^{\dagger\dagger} = q\ ,\ (qq')^{\dagger} = q'^{\dagger} q^{\dagger}$$

共役四元数

以上，式 (4),(5) から次が分かる.

$$q^{\dagger\dagger} = q\ ,\ (qq')^{\dagger} = q'^{\dagger} q^{\dagger}$$

また，共役四元数の定義から次も明らか.

共役四元数

以上，式 (4),(5) から次が分かる.

$$q^{\dagger\dagger} = q\ ,\ (qq')^{\dagger} = q'^{\dagger} q^{\dagger}$$

また，共役四元数の定義から次も明らか.

四元数 q がスカラーである条件 $q^{\dagger} = q$

四元数 q がベクトルである条件 $q^{\dagger} = -q \qquad \ldots$ (v)

四元数のノルム

四元数 q とその共役四元数 $q^\dagger$ の積を考えると

$$qq^\dagger = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \ (= q^\dagger q) \tag{6}$$

となる．そこで，四元数 q のノルムを次のように定義する．

$$\|q\| = \sqrt{qq^\dagger} = \sqrt{q^\dagger q} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \tag{7}$$

このとき，ベクトル $\boldsymbol{a}$ はそれを四元数とみなしたとき，四元数としてのノルムとベクトルとしてのノルムは一致する．

さらに，$q \neq 0$ であれば $\|q\| > 0$ であるから，式 (7) から次が分かる．

$$q\left(\frac{q^\dagger}{\|q\|^2}\right) = \left(\frac{q^\dagger}{\|q\|^2}\right) = 1 \;\Leftrightarrow\; q^{-1} = \frac{q^\dagger}{\|q\|^2}$$

ただし，q^{-1} は q の逆元を表す．

四元数のノルム

逆元が存在し，割り算ができるということは $qq' = qq'' \Rightarrow q' = q''$ を表す.

四元数のノルム

逆元が存在し，割り算ができるということは $qq' = qq'' \Rightarrow q' = q''$ を表す．これは内積やベクトル積では成り立たない．なぜなら $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle$ であっても $\boldsymbol{a}$ に直交する任意のベクトル $\boldsymbol{b}$ を加えても成り立ち，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ であっても $\boldsymbol{a}$ に平行する任意のベクトル $\boldsymbol{b}$ を加えても成り立つからである．

四元数による回転の表示

単位四元数 q と，四元数とみなしたベクトル $\boldsymbol{a}$ の四元数積 $\boldsymbol{a}' = q\boldsymbol{a}q^\dagger$ を考える．式 (6) から次がわかる．

$$\left(q\boldsymbol{a}q^\dagger\right)^\dagger = -q\boldsymbol{a}q^\dagger$$

これと（v）から，$q\boldsymbol{a}q^\dagger$ はベクトルである．これを $\boldsymbol{a}'$ と書くと，計算規則から 2 乗ノルムは次の通り．

$$\|\boldsymbol{a}'\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2$$

四元数による回転の表示

また，q が単位四元数であることから ${q_0}^2 + {q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2 = 1$ である．
よって，

$$q_0 = \cos\Omega\,,\ \sqrt{{q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2} = \sin\Omega$$

なる角度 Ω が存在し，スカラー部分とベクトル部分に分けて書くと

$$q_0 = \cos\frac{\Omega}{2}\,,\ q = \cos\frac{\Omega}{2} + \boldsymbol{l}\sin\frac{\Omega}{2}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{l}$ は単位ベクトルである．

四元数による回転の表示

また，計算規則と式変形から以下を得る．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}' &= q\boldsymbol{a}q^{\dagger} \\ &= \boldsymbol{a}\cos\Omega + \boldsymbol{l}\times\boldsymbol{a}\sin\Omega + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{l}\rangle \boldsymbol{l}(1-\cos\Omega)\end{aligned}$$

これから， 四元数 q が，回転軸 $\boldsymbol{l}$ の周りの回転角 Ω の回転を表していることがわかる． q の作用を，回転軸 $\boldsymbol{l}$ の周りの回転角 Ω の回転子であるという．

さらに，$-q$ について，

$$-q = -\cos\frac{\Omega}{2} - \boldsymbol{l}\sin\frac{\Omega}{2} = \cos\frac{2\pi-\Omega}{2} - \boldsymbol{l}\sin\frac{2\pi-\Omega}{2}$$

であるから，これは $-\boldsymbol{l}$ の周りの角度 $2\pi-\Omega$ の回転を表している．これは，$\boldsymbol{l}$ の周りの角度 Ω の回転と同じである．

四元数:

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

その共役:

$$q^\dagger = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$$

計算規則:

$$i^2 = -1\ ,\ j^2 = -1\ ,\ k^2 = -1$$
$$jk = i\ ,\ ki = j\ ,\ ij = k\ ,\ kj = -i\ ,\ ik = -j\ ,\ ji = -k$$

四元数 q のノルム:

$$\|q\| = \sqrt{qq^{\dagger}} = \sqrt{q^{\dagger}q} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

四元数 q の逆元:

$$q\left(\frac{q^{\dagger}}{\|q\|^2}\right) = \left(\frac{q^{\dagger}}{\|q\|^2}\right) = 1 \;\Leftrightarrow\; q^{-1} = \frac{q^{\dagger}}{\|q\|^2}$$

四元数まとめ

四元数による回転の表示:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}' &= q\boldsymbol{a}q^{\dagger} \\ &= \boldsymbol{a}\cos\Omega + \boldsymbol{l}\times\boldsymbol{a}\sin\Omega + \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{l}\rangle\,\boldsymbol{l}(1-\cos\Omega)\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ 回転軸 $\boldsymbol{l}$ の周りの回転角 Ω の回転を表している

今後の課題

今回は代数幾何の入門としてベクトルなど慣れ親しんだものを扱ったが
今後は多項式環などにも食わず嫌いせずに触れていきたい.

今後の課題

今回は代数幾何の入門としてベクトルなど慣れ親しんだものを扱ったが今後は多項式環などにも食わず嫌いせずに触れていきたい．ちなみに後で知ったのだがここまでの内容は“ 幾何学的代数 ”というものらしく結局のところ元々学ぼうとしていた“ 代数幾何 ”がなんなのかはいまだに分かっていない．

参考文献

[1] 金谷健一, 幾何学と代数系, 森北出版株式会社,2014.