$1 + 1 =$?

森田 泰成

芝浦工業大学 数理科学研究会

November 3, 2019

数学に興味を持ち始めた高校生の頃に $1+1$ を証明するにはノート 1 冊かかるという記事をどこかで見かけた. その当時は何をどのように証明すればよいのかすらわからなかった. なのである程度知識を身に着けた今, 再度証明の概要でもつかめればと思った.

数についての算術として, ペアノの公理というものが有名である.

定義

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a = a$
3. $a,\ b \in \mathbb{N} \Rightarrow\ (a = b\ \wedge\ b = a)$
4. $a,\ b,\ c \in \mathbb{N} \Rightarrow\ [(a = b\ \wedge\ b = a) \Rightarrow a = c]$
5. $(a = b\ \wedge\ b \in \mathbb{N}) \Rightarrow a \in \mathbb{N}$
6. $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a + 1 \in \mathbb{N}$
7. $a,\ b \in \mathbb{N} \Rightarrow [a = b \Rightarrow a + 1 = b + 1]$
8. $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a + 1 \neq 1$
9. $k \in K,\ x \in \mathbb{N}(1 \in k\ \wedge\ x \in k) \Rightarrow [{}^{\forall}x,\ x + 1 \in k \Rightarrow \mathbb{N} \subset k]$

研究概要

しかし, 今回はペアノの公理ではなく, デデキントの数における概念, その結果得られた算術の論理について研究した.

集合の定義

今後, 一般的な集合を大文字のアルファベット $A,\ B,\ C,\ \cdots$ とし, 各集合 $A,\ B,\ C,\ \cdots$ の元として $a,\ b,\ c,\ \cdots$ を用意する.
なお空集合は定義せず, その他部分集合や共通部分を定義する。

集合の写像

定義

集合 S の元 s に対してある法則に沿った要素が確定し, その元を $\varphi(s)$ で表す. 便宜上, 要素 s と部分集合 T の像は, 省略のためそれぞれ $s'(=\varphi(s))$, $T'(=\varphi(T))$ で表す. また, ローマ字の小文字, および大文字でプライムのつかないものはいつでも集合 S の要素, および部分集合とする.

定義

集合 S の元 s に対してある法則に沿った要素が確定し, その元を $\varphi(s)$ で表す. 便宜上, 要素 s と部分集合 T の像は, 省略のためそれぞれ $s'(=\varphi(s))$, $T'(=\varphi(T))$ で表す. また, ローマ字の小文字, および大文字でプライムのつかないものはいつでも集合 S の要素, および部分集合とする. 自身へ移行させる写像を「合同写像」と名づける.

定義

1つの集合 S の写像 φ は, もし集合 S の相異なる要素 $a,\ b$ がいつでも相異なる像 $a' = \varphi(a),\ b' = \varphi(b)$ に対応するならば「相似」写像だという.

定義

もし φ が集合 S の相似な, または相似でない写像で, $\varphi(S)$ が集合 Z の部分集合ならば, φ を S の Z の「中へ」の写像と呼び, S は φ によって Z の中へ写像されたという. 従ってもし $\varphi \subset S$ ならば, φ を集合 S の「自分自身の中へ」の写像とする.

集合の自分自身の中への写像

定義

もし $K' \subset K$ ならば K を「連鎖」という. 集合 S の部分集合 K だけでは連鎖とはならない. ただ確定した写像 φ に関連させてのみ与えられる. 集合 S の自分自身の中への別の写像に関しては K は連鎖にならないことも十分にある.

集合の自分自身の中への写像

定義

もし $K' \subset K$ ならば K を「連鎖」という. 集合 S の部分集合 K だけでは連鎖とはならない. ただ確定した写像 φ に関連させてのみ与えられる. 集合 S の自分自身の中への別の写像に関しては K は連鎖にならないことも十分にある.

例 自分自身の中への写像 φ, ψ があり, $K' \subset K$ であるとき, K は (φ) に関して) 連鎖であるが, ψ に関して連鎖であるとは限らない.

集合の自分自身の中への写像

定義

もし $K' \subset K$ ならば K を「連鎖」という. 集合 S の部分集合 K だけでは連鎖とはならない. ただ確定した写像 φ に関連させてのみ与えられる. 集合 S の自分自身の中への別の写像に関しては K は連鎖にならないことも十分にある.

例 自分自身の中への写像 φ, ψ があり, $K' \subset K$ であるとき, K は (φ) に関して) 連鎖であるが, ψ に関して連鎖であるとは限らない.

定義

A が S の勝手な部分集合とする. A を部分集合とする連鎖 (例えば S) のすべてをとり, それの共通集合を A_0 で表す. さらに A_0 は連鎖なので A_0 を「集合 A の連鎖」または単に A の連鎖と呼ぶ.

定義

集合 S は, もしそれ自身の真部分集合に相似ならば「無限」であるといい, そうでない場合には S を「有限」であるという.

定義

1つの集合 N は N を自分自身の中へ移す相似写像が存在して, その結果 N が $\varphi(N)$ に含まれない1つの要素の連鎖としてあらわれてくるとき, 「単純無限集合」と呼ぶ. この要素を以下には記号「1」で表す. これを N の「基礎要素」と呼び, 同時に単純無限集合にはこの写像 φ によって「順序付けられる」という. その結果, 単純無限集合 N の本質は N の写像 φ と要素 1 の存在に存することになり, これらは次の条件 α, β, γ, δ を満足する.

- α $N' \subset N$
- β $N = 1_0$
- γ 要素 1 は N' に含まれない.
- δ 写像 φ は相似である.

定義

写像 φ によって順序付けられた単純無限集合 N にあたって, φ が順序付ける写像ならば, これらの N 要素を「自然数」または「順序数」または単に「数」と呼び, 基礎要素 1 を「数系列」N の「基礎数」と呼ぶ. これらは順序付ける写像 φ によって作り出されたもので, また N の要素, または部分集合である. *1* つの数 n の像 n' は n に「続く」数, n の次の数とも呼ばれる.

定理

m と n とが任意の数ならば, いつでも次の λ, ν, μ の場合のうち, 1 つのみが起こる.

λ $m = n, \ n = m$

μ $m < n, \ n > m$

ν $m > n, \ n < m$

定理

集合 Ω の自分自身の中への任意の写像 θ と, そのほかに Ω の確定して *1* 要素 ω が与えられていれば, 数系列 N の写像 ψ で, 条件

1. $\psi(N) \subset \Omega$
2. $\psi(1) = \omega$
3. $\psi(n') = \theta\psi(n)$

を満足するものが存在し, *1* つに限る.

数系列 N の写像 ψ の定義, またはこれによって確定した「関数」$\psi(n)$ を, この集合が数系列 N 自身であるという場合に適応しようとすることが問題となる. この集合 Ω に対しては Ω のそれ自身の中への写像 θ がすでに考慮され, 写像 φ で, これによって N は単純無限集合に順序付けられている.

そうすると, $\Omega = N$, $\theta(n) = \varphi(n) = n'$ で

1. $\psi(N) \subset N$

となる. 次に Ω から要素 ω を, すなわち N から ω を勝手に選び出すことを示す.

$\omega = 1$ と仮定すると, ψ は明らかに N の合同写像となる. ($\because$ 条件 $\psi(1) = 1,\ \psi(n') = (\psi(n))'$ は一般に $\psi(n) = n$ により満足される.)

そうすると, $\Omega = N$, $\theta(n) = \varphi(n) = n'$ で

1. $\psi(N) \subset N$

となる. 次に Ω から要素 ω を, すなわち N から ω を勝手に選び出すことを示す.
$\omega = 1$ と仮定すると, ψ は明らかに N の合同写像となる. ($\because$ 条件 $\psi(1) = 1,\ \psi(n') = (\psi(n))'$ は一般に $\psi(n) = n$ により満足される.)
もしほかに N の写像 ψ が生成されるものとすれば, ω に対して 1 と相異なる数, N' に含まれる数 m' を選ばなければならない. m 自身を任意の数とすると, 写像 ψ は明らかにこの数 m の選び方に依存しているため, 任意の数 n に対応する像 $\psi(n)$ を記号 $m + n$ で表し, この数を, 数 m に数 n を「加える」ことによって生じた「和」または, $m,\ n$ の和と名付ける. この「加法」は, 次の条件で余すところなく確定する.

2. $m + 1 = m'$
3. $m + n' = (m + n)'$

これにより以下の諸定理が成り立つ.

これにより以下の諸定理が成り立つ.

1. $m' + n = m + n'$
2. $m' + n = (m + n)'$
3. $1 + n = n + 1$
4. $m + n = n + m$
5. $(l + m) + n = l + (n + m)$
6. $m + n > n$
7. $m + n = a + n$ ならば $m = a$
8. $l > n$ ならば 1 つの数 m で条件 $m + n = l$ を満足するこの m はただ 1 つに限る

今回の主題について考察する. 単純無限集合 N において, これらの数は順序付けられているため, $1 + n = n'$ であるから, もし $n = 1$ のときこの n' を **2** とするならば,

今回の主題について考察する. 単純無限集合 N において, これらの数は順序付けられているため, $1+n=n'$ であるから, もし $n=1$ のときこの n' を **2** とするならば,

$$1+1=2$$

今回の主題について考察する. 単純無限集合 N において, これらの数は順序付けられているため, $1 + n = n'$ であるから, もし $n = 1$ のときこの n' を **2** とするならば,

$$1 + 1 = 2$$

という等式が成り立つ. 従ってこのタイトルの答えは

2

幼少のころに $1+1$ の答えが「田んぼの田」といった言葉遊びをしたことがあるかと思われるが, もしこの単純無限集合 N において, 基礎要素 1 に続く数を「田」とすれば,

幼少のころに $1+1$ の答えが「田んぼの田」といった言葉遊びをしたことがあるかと思われるが, もしこの単純無限集合 N において, 基礎要素 1 に続く数を「田」とすれば,

$$1 + 1 = 田$$

といった一見馬鹿げた回答も正解とみなすことができる.

われわれはこのような回答を正解とすることに抵抗を持つ. というのは古代より数, もとい数系列は $1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ というものとされており, われわれが幼少のころから慣れ親しんでいるからである. そのため, 数が $1,$ 田, $3,\ \cdots$ というような順序で数をされても理解に苦しむことになるだろう. すなわち, 数というものは人間の相互認識に依存しているものであると考える.

今後の課題

これまでの過程より, 常識と思われるようなものを厳密に証明することは大変な労力と, 相当な理解が必要となることをこの身で実感できた. 哲学的な内容にしばしば陥り, 道に迷うことが多かったが, 断片的にでも理解できた. 今後はデデキント, ペアノの両者の算術に関する論理の違いや, 数学史についても興味を持ったので少し沼にはまってみようかと思う.

参考文献

デーデキント著, 河野伊三郎訳, 数について-連続性と数の本質-, 岩波文庫, 2017 年

足立恒雄著, 数とは何か, 共立出版, 2011 年