電磁場の解析力学

豊嶋 祐人

芝浦工業大学 数理科学研究会

2019/11/3

はじめに

本発表では古典電磁気学で得られた諸成果を解析力学的に整備する. すなわち **Lorentz** 力を与える荷電粒子の **Lagrangian** を (通常の方法では与えられないが) 構成し, 最小作用の原理を場の方程式に拡張することで **Maxwell** 方程式を与える電磁場の作用なるものを与えたりということを行う. これによって, 古典論においていっそう解析力学の適用範囲が拡張される.

目次

一般化ポテンシャル

Lorentz 力のような速度に依存する非保存力に対して最小作用の原理を満たすように一般化ポテンシャルを定義する**.**
具体的には **Lagrangian** が $L = \frac{1}{2}m\dot{q_i}^2 - U(q_i, \dot{q}_i)$ であるとして作用が停留する **(**すなわち **Lagrange** 方程式が成り立つ**)** ためには以下を満たす U を一般化ポテンシャルとすればよい**.**[1]

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

[1]index i は粒子を識別するものである.

荷電粒子の Lagrangian

Lorentz 力に対する一般化ポテンシャルは $U = q(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$ である.
実際, $\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})}{\partial \boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$, $\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})}{\partial \boldsymbol{v}} = \left(\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\right)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{A}\times\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{v}\right) = \boldsymbol{A}$ より以下が成り立つ.[2][3]

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= -q\mathrm{grad}\phi + q\mathrm{grad}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) - \frac{d}{dt}\left(q\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})}{\partial \boldsymbol{v}}\right) \\
&= -q\mathrm{grad}\phi + q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) - q\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\right) \\
&= -q\mathrm{grad}\phi + q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) - q\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}\frac{dx}{dt} - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y}\frac{dy}{dt} - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})
\end{aligned}$$

よって荷電粒子の **Lagrangian** は $L = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 - q(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$ であり, r に対する共役運動量は $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A}$ であるから **Hamiltonian** は $H = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 + q\phi$ である.
ここでもちろん, **Lagrangian** はゲージ不変である.

$$L' = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 - q\phi' + q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}' = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 - q\phi + q\frac{\partial\chi}{\partial t} + q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} + q\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{\partial\chi}{\partial \boldsymbol{r}} = L + q\frac{d\chi}{dt}$$

[2] $\mathrm{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\times\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$ を利用した.
[3] Lagrange 形式では $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ は互いに独立であることに留意されたい.

Maxwell 方程式と電磁場テンソル

Maxwell 方程式は以下で表される.[4]

$$\partial_\nu f^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\mu, \quad \partial_\rho f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\rho} + \partial_\nu f_{\rho\mu} = 0$$

実際, 以下の計算から第 **1** 式は電場に関する **Gauss** の法則と **Ampere** の法則であるし, 第 **2** 式は磁場に関する **Gauss** の法則と電磁誘導則であることが確かめられる.

$$\partial_\nu f^{0\nu} = -\mathrm{div}\frac{\boldsymbol{E}}{c}, \quad \partial_\nu f^{1\nu} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z}$$

$$\partial_3 f^{12} + \partial_1 f^{23} + \partial_2 f^{31} = -\mathrm{div}\boldsymbol{B}, \quad \partial_0 f^{12} + \partial_1 f^{20} + \partial_2 f^{01} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

[4] 第 2 式は Bianch 恒等式と呼ばれる.

電磁場の作用

最小作用の原理を拡張することで場の作用 **(action of field)** を定義する. 場の作用は以下で構成される.

$$S = S_{matter} + S_{field} + S_{int}$$

ここで (運動の軌道が固定された上で) 場を変関数としたときの停留が場の方程式であるような汎関数を場の運動項と物質と場の相互作用項の和と定義し, (場を固定した上で) 一般化座標を変関数としたときの停留が 4 元運動方程式であるような汎関数を物質の運動項と物質と場の相互作用項の和と定義する.
このとき, 電磁場の作用は以下である.

$$S = -\Sigma mc^2 \int ds + \frac{1}{4\mu_0} \iint f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} d^3\boldsymbol{r}dt + \iint j^\mu A_\mu d^3\boldsymbol{r}dt$$

もちろん, この作用から **Maxwell** 方程式と荷電粒子の **4** 元運動方程式が導出される.

参考文献

- 須藤 靖, 解析力学・量子論, 東京大学出版会, 2008.
- 砂川 重信, 理論電磁気学 第 3 版, 紀伊國屋書店, 1999.
- 江沢 洋, 相対性理論, 裳華房, 2008.