多様体学習のおける考察

山岡 史弥

芝浦工業大学 数理科学研究会

2019/11/01

研究背景

今 とある多様体にはまっていて, その内容にちょっとした試行的要素があるのだが, ユークリッド空間内の多様体というのはどんな感じなのか, あるいはユークリッド空間内の多様体上の関数を考える時も, ユークリッド空間内の多様体と線形部分空間の位置関係を考える時も 多様体のパラメータ表示が重要であることを見極めました. ここで, 微分可能多様体の定義を与える契機を説明したいと思います.

定理

M が n 次元 (微分可能) 多様体であるとは, M がハウスドルフ空間であり次のような開近傍 U (の集合) と U から n 次元ユークリッド空間の開集合への同相写像がある. ちなみに, (U, ε) を局所座標あるいは座標近傍, その集まり (U, ε) を局所座標系と呼ぶ.

例 3.1.4

ユークリッド空間内の多様体といってこれまで議論してきたものは, 微分可能多様体である. ユークリッド空間は, もちろんハウスドルフ空間としてユークリッド空間内のハウスドルフ空間である.

研究方針

n 次元多様体 M, n' 次元多様体 M' が与えられると, それらの直積空間 (direct product) は $M \times M$ は自然に $n + n'$ 次元多様体となるただし直積空間の位相は, M, M' の開集合 U,U' の直積 $U \times U'$ のの任意個の和集合を開集合とすることで定まる.

n 次元位相多様体について

n 次元位相多様体 M の座標近傍 S が次の性質を持つとき S を M の C^∞ 級座近傍と呼ぶ α, β に対して, (U_a, ψ_a),(U_b, ϕ_b) における局所座標系の座標の変換を決める n 変数の関数がそれぞれ r 回連続微分可能である. また, すべて解析的のときには S を C^∞ 級座標近傍系という. ここで, アファイン空間の概念を上げたいと思う.

可微分多様体の例

R^n は解析多様体である. 実際, R^n の開被覆として R^n 自身だけをとり, R^n の R^n への恒等写像を r とすれば, (R^n, r) が R^n の C^∞ 級座標近傍であるのは自明アファイン空間というものは, R^n の座標 $x^1, \cdots, x^n$ が R^n 全体での局所座標系としたとき, R^n を可微分多様体と考えたものをさす.

曲線座標系について 1

U を R^n の開集合，$f^1, \cdots, f^n$ を U で定義された C^r 級の実数値関数とする. 写像 $x \to f(x) = (f^1(x), \cdots, f^n(x))(x \in U)$ が U から R^n の中への 1:1 の写像であって関数行列式 $\frac{D(f^1, \cdots, f^n)}{D(x^1, \cdots, x^n)}$ が U の各点で 0 でないと仮定する.

曲線座標系について 2

逆関数の定理により, $f(U)$ は R^n の開集合で $f^-1:f(U) \to U$ も C^∞ 級である. このことは, $(R^n,r),(U,f)$ がアファイン空間の C^∞ 級の座標近傍系であることを意味する. ゆえに, $(f^1,f^2,,,,,,,,f^n)$ はアファイン空間の局所座標系であって, 普通曲線座標系と呼ばれている.

位相空間 S^n について 1

(x, y) 平面 R 上の円を S で表し,S に R の部分空間としての位相を入れる.
U_1=p=(x,y) $\in$ S—$y > 0$
V_1=p=(x,y) $\in$ S—$y < 0$
U_2=p=(x,y) $\in$ S—$x > 0$
V_2=p=(x,y) $\in$ S—$x < 0$
とおくと, 各 U_i は開集合であって $U_1 \cup U_2 \cup V_1 \cup V_2$=$S$ である.

位相空間 S^n について 2

$U_i V_i$(i=1,2) から開区間 $I = \{t| -1 < t < 1\}$ への写像 ϕ_i を $\phi_1(x,y)$=x,$\phi_2(x,y)$=y より定めると $\phi_i(x)$,$\phi_2(x)$ はそれぞれ U_i,V_i から I への同相写像である.

R^n から原点 0 を除いた集合 R^{n+1} を次のように同値関係を定義する. すなわち 2 点 $x = x^i$,$y = y^i$ が同値とは 0 でない実数 λ が存在して x=λy すなわち $x^i = \lambda y^i (i = 1, 2 \cdots n + 1)$ となることであるとする. この同値関係による同値類の集合を P^n であらわす.$R^n + 1$-0 の点 x を含む同値類を $S(x)$ で表すと,S は $R^n + 1$-0 からの P^n の上への写像である. また, P^n の元 $S(x)$ に R^n の原点をとおる直線 tx を対応させるとこの対応は 1 対 1 の対応となり P^n を R^n の原点をとおる直線の全体の集合と考えることができる. ちなみに P^n のことを n 次元 (実) 射影空間と呼ばれる.

開部分多様体

M を C^r 多様体, D を M の開集合,M の C^r 級座標近傍系を $\{(U_a, \phi_a)\}$ とする.U_b=U_b=$U_b \cap D$ とおき, ϕ_a を U_b に制限したものにすると D の C^r 級座標近傍系となり, D は C^r 多様体である.D を, M の開部分多様体と呼ぶ.

積多様体

M,N を m 次元および n 次元の C^r 多様体, $\{(U_a, \phi_a)\}$, $\{V_i, \phi_i\}$ をそれぞれ M, N の C^r 級座標近傍系とする. まず, 直積集合 $M \times N$ に M,N の直積空間としての位相を導入すると, $M \times N$ はハウスドルフ空間となる.

トーラス

S の n 個の値 $S \times S \cdots S$ は n 次元解析多様体である. これを T^n という記号で表し, n 次元トーラスという.

ここで, n 次元 C^r 級多様体とする. ただし 1¡r¡∞ , または r=ω とする. U を M の開集合,f を U で定義された（実数値）連続関数を M の C^r 級座標近傍系とする. U の点 p の近傍 V を十分小さくとるとある添え字 $\alpha \in A$ にたいして V$\in$ $U_a \cap U$ であるようにできる.

C^s 級関数

R^n の開集合で定義された関数が $\phi_a(p)$ の近傍で C^s 級であるとき, f は U の点において C^s 級であるという. 最初のスライドに戻るが, この定義は $p \in U_a$ なる $\alpha \in A$ の選び方によらない.f が U の各点において C^s 級のとき, f を U 上の C^s 級関数と呼ぶ. 特に各 U_a での局所座標 x_a(i=1,2,,,,,n) は U 上の C^r 級関数である. さて f を M の点 p の近傍において C^s 級とする.$p \in U_a$ とすると $\phi_a(p)$ の近傍において表す式は以下の様になる.

点 p における近傍の式

$$f(\phi_a(u))=F_a(u\cdots u^n)$$

となる. ここに F_a は n 変数 u,,,,,,u^n の C^n 級関数である.q=$\phi_a(u)$ とおくと