グラフ理論

芝浦工業大学　数理科学研究会
BV18025 加藤 諒

2020 年 6 月 12 日

目次

1　研究背景

名前とその存在のみを知っていたグラフ理論というものに関する本が本棚に埋まっていた．が，なかなか手をつけずにいた．しかしいざ取り掛かるとその応用性の広さと昔からの興味であった 4 色問題にも関係を持てることがわかり今回，研究するに至った．また，その過程で 4 色問題の歴史的な事実も興味深く感じた．

2　グラフとは

まず初めにグラフ理論でいうグラフとは何かについて触れていく．高校数学までの範囲でグラフと聞くと普通，平面上のある座標をとったときのある x と y との方程式を満たすすべての点 (x, y) の集合のことを指すが，グラフ理論でいうグラフはそうではない．簡単にいうとここでいうグラフとはものとものとの繋がりを表すものである．

2.1　グラフの導入

今，あるスポーツの試合を次の組み合わせで行ったことを考えよう．

1) A は C，D，F と試合をした
2) B は C，E，F と試合をした
3) C は A，B と試合をした
4) D は A，E，F と試合をした
5) E は B，D，F と試合をした
6) F は A，B，D，E と試合をした

この状況を次の法則に則って図示する．

i) 各チームを丸 (もしくは点) で示す
ii) チームが試合を行ったらそれらを線分で結ぶ

すると次の図 1 のような図形になる．このようなグラフである．

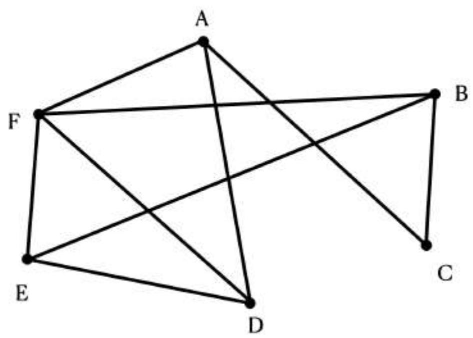

図 1　試合の記録

グラフは頂点と呼ばれるいくつかの点 A，B，C，D，E，F と AC，EB などの辺と呼ばれるいくつかの線分からできている．上図を見てわかるように，グラフの辺は描きようによっては頂点以外で交わることもあるが，これはグラフを平面に描いたために起こったことである．

2.2　空グラフ，完全グラフと補グラフ

この章ではグラフ理論でしばしば使用される特別なグラフである空グラフ，完全グラフとさらに補グラフを定義する．

定義 2.1 (空グラフ)**.** グラフに辺がないグラフを空グラフという．また，このときの辺のない頂点を孤立頂点という．さらに頂点が $1, 2, 3\cdots$ のグラフを普通 $O_1, O_2, O_3\cdots$ と書き，一般に n 個の頂点のみで辺のない空グラフは O_n で表される．

図 2　頂点 1 の空グラフ

図 3　頂点 2 の空グラフ

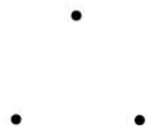

図 4　頂点 3 の空グラフ

定義 2.2 (完全グラフ)**.** グラフの各頂点の対が 1 つの辺で結ばれているグラフを完全グラフ (または普遍グラフ) という．また，頂点が $1, 2, 3\cdots$ のグラフを普通 $U_1, U_2, U_3\cdots$ と書き，一般に n 個の頂点をもち，どの頂点対も 1 つの辺で結ばれるグラフは U_n で示される．それらは全ての対角線の描かれた n 辺の多辺形である．

図 5　頂点 1 の完全グラフ

図 6　頂点 2 の完全グラフ

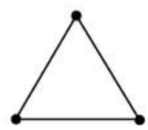

図 7　頂点 3 の完全グラフ

定義 2.3 (補グラフ)**.** あるグラフ G が描かれているとそれらに不足している辺を加えることによって同じ頂点を持つ完全グラフに直すことができる．たとえば，次頁の図 8 は図 1 を破線を用いて完全グラフにしたものである．このとき次頁の図 9 のように付け足した辺と元の頂点のみで元のグラフとは別のグラフを描くことができる．この新しいグラフをグラフ G の補グラフといい，普通 $\overline{G}$ で表す．定義からグラフ G とグラフ $\overline{G}$ の 2 つのグラフの辺を合わせるとそれらの頂点を結ぶ完全グラフとなる．

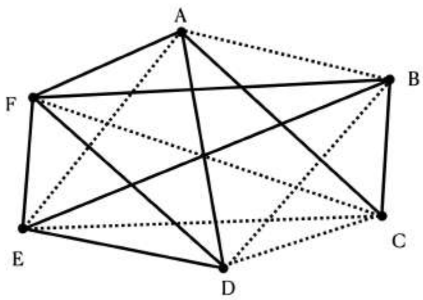

図 8　図 1 のグラフを完全グラフに直したもの

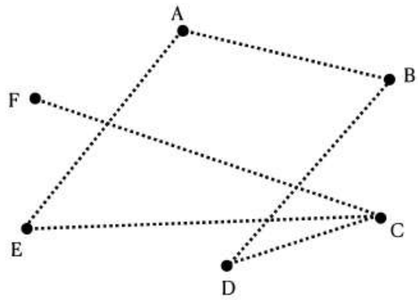

図 9　図 1 のグラフの補グラフ

2.3　同型なグラフ

グラフの描き方にはかなりの自由がある．辺は直線である必要はないしどのように曲がっていても前と同じ頂点を結んでいればよい．また，頂点は平面の任意の位置へ移してよい．これらを踏まえると図 1 を次の図 10 のように描いても良いのである．図 1 と図 10 を試合の記録と見たとき同じ情報を持っているからだ．そう考えれば，図 1 と図 10 はある意味で同じグラフである．

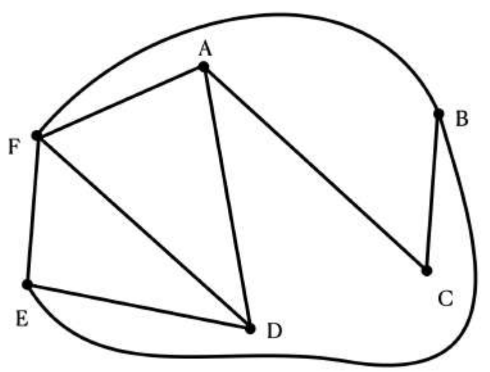

図 10　図 1 のグラフの描き方を変えたもの

このことから，同型なグラフを次のように定義する．

定義 2.4 (同型なグラフ)**.** 2 つの G_1 と G_2 のグラフが同型であるとは，それらが同一の状況の像であることをいう．すなわち G_1 と G_2 はそれらが同数個の頂点をもち，G_1 の 2 つの頂点，たとえば (B_1, B_1) が結ばれると G_2 の対応する頂点 (B_2, B_2) がまた辺で結ばれ，かつその逆が成り立つことである．

この定義によって図 1，図 10 と次頁の図 11 の 3 つのグラフは異なったように描かれているにもかかわらず同型である．

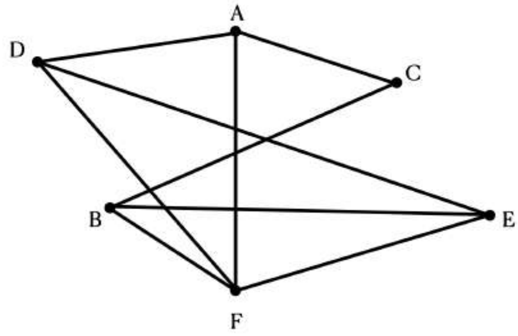

図 11　図 1 のグラフと同型なグラフの例

しばしば 2 つのグラフが同型かどうかを決める問題に出会うが，そうならない単純な理由がすぐ見つかることがある．たとえば 2 つのグラフが同じ頂点をもたないとか，同じような辺の対が取れないとかである．逆に簡単に同型であることがわからない 2 つのグラフで名前をうまく選んでそれらが同型であるか否かを定めようとしてもなかなか難しいこともある．

2.4　平面グラフ

多くの場合，グラフはどのように描かれているかは問題ではない．すなわち，同型なグラフは同一の情報をもっているので同一であると考えられる．グラフを初めで述べた試合の記録と解釈する時が正しくそれである．しかし，これから述べるように特別なグラフの描き方があるかどうかが本質的である場合もある．同型なグラフであっても描き方によっては辺の交わり方が変わる．グラフの頂点でないところで辺が交わるグラフと同型なグラフが頂点のみで辺が交わるように描けることがある．ここで，平面グラフを次のように定義する．

定義 2.5 (平面グラフ)．辺が頂点以外で交わらない，つまり共通点のないように描けるとき，そのグラフは平面グラフであるという．

平面グラフは多くの交差点や町などを結んでいる道路地図とみることができる．逆に，道路地図は平面グラフであると考えられる．同様に市街地図も道路を辺，広場や交差点を頂点とする平面グラフである．現代技術は多くのものを変えつつある．今では，道路地図は平面グラフであるという前の簡単な概念も変えられている．道路網は一定の入口しか有しない高速道路が加わったために，一方から他方へしか行けない点でも交差する．つまり，地図のグラフの辺は道路の交差点でない点でも交わるようになっている．

2.5　平面の問題

ここで問題解決におけるグラフの使用例を述べる．グラフが平面に辺が交わらずにかけるか否かを決定することが本質的である．ここでの例は古いパズル，供給問題である．

2.5.1　供給問題

3 つの家とその住人のための 3 つの井戸がある．土地と気候のかげんで井戸のどれか 1 つ 2 つはしばしば乾上がってしまう．そのためどの家からもどの井戸へも行かなければならない．A,B,C の住人は次第にお互いを強く嫌い合ったために，X,Y,Z のどの井戸へも，行きも帰りも他の家の人と出会わないようなそれぞれの道を作ることにした．次の図 12 に各々の家の人が井戸へ直接に行ける自然な配列を示した．

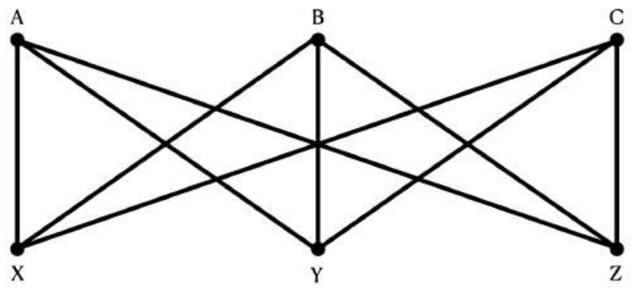

図 12　3 つの家と 3 つの井戸の位置関係

これらの道あるいは辺は A,B,C の家と X,Y,Z の井戸の他の多くの点で交わっている．しかし描き方を変えることで次の図 13 のように交点の個数は 1 個にまで減らせる．

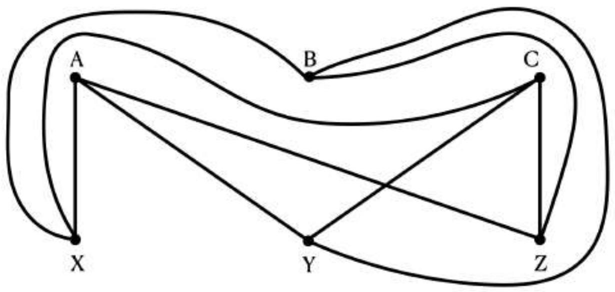

図 13　図 12 を描き変えたもの

そこで考えたい問題は次のことである．グラフが平面的であるように，つまり，交わらないで道をつけられるのか．いろいろやってみて，できないことがわかる．しかし試行錯誤による不可能性はこの問題の道はつけられない，との数学的証明とはならない．数学的証明は次の定理の基として与えることができる．ここで，次の定理を考える．

定義 2.6 (ジョルダン曲線定理)**.** $\mathcal{K}$ が平面の連続閉曲線である．$\mathcal{K}$ は多変形，円周，楕円あるいはもっと複雑な形の曲線である．すると $\mathcal{K}$ は平面を外部と内部とに分け，内部の点 P を外部の点 Q に連続曲線 $\mathcal{L}$ で結ぶと，$\mathcal{L}$ は $\mathcal{K}$ と交わる．(次頁の図 14 参照)

この事実は幾何学的直感で完全に自明なことだとも思うだろう．問題は曲線の精確な定義にあるが，このことはジョルダンの定理の証明とともに省く．

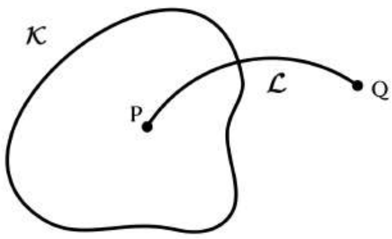

図 14　定理理解の手助け 1

この定理から直感的に明らかな次の事実がわかる．

1. 閉曲線 $\mathcal{K}$ に 2 点，A と Y をとり，これらを $\mathcal{K}$ とその端点以外で交わらない曲線 (A,Y) で結ぶと，(A,Y) は端点以外はまったく $\mathcal{K}$ の内部か $\mathcal{K}$ の内部にある
2. $\mathcal{K}$ 上に 4 点が ABYZ の順にあり，互いに交わらない曲線 (A,Y) と (B,Z) があるとする．そうであると 2 つの曲線の一方，たとえば (A,Y) が $\mathcal{K}$ の内部にあり，他方の (B,Z) が外部にあるときのみ可能であることがわかる．
   (いずれも図 15 参照)

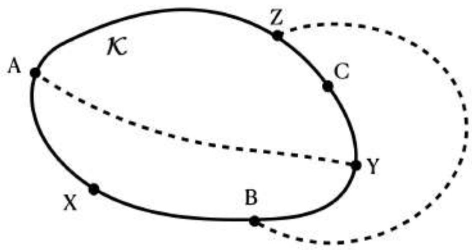

図 15　定理理解の手助け 2

2.5.2　供給問題の解

以上を踏まえて先程の問題を考える．$\mathcal{K}$ 上に 6 つの点を A,X,B,Y,C,Z の順にとる．すると 3 つの曲線 (A,Y),(B,Z),(C,X) を交わらないように描くことはできない．このことは，3 つの曲線は $\mathcal{K}$ の内部か外部の 2 つの領域にあるのだから，少なくとも 2 つの曲線は同一領域にあり，上の考察から，それらは交わることになる．この議論は 3 人の仲の悪い隣人と 3 つの井戸の問題に直接適応できる．対応するグラフが平面グラフであったとする．すると交わることなく辺，(A,Y),(B,Z),(C,X),(Y,C),(C,Z),(Z,A) が描けるが，これらは平面の閉曲線をなす．ところが上に述べた理由によって (A,Y)(B,Z)(C,X) の辺は交わりなしには描けない．

以上の平面グラフの応用は多少ともあたりまえとも見えるが，こうした一見小さなパズルの問題

をくだらないと思うべきではない．貴重な数学的アイディアの基となった無数のこうした例がある．このことは記号と公式の巨大な機構のみが数学的理論の深さを測る尺度ではないことを思い起こさせる．

2.6　グラフの辺の個数

グラフをゲームのシリーズのレコードであるとして導入したが，そこではどの 2 つのチームの間でもゲームが行われていると仮定した．もちろん 2 つのチームがいくつものゲームを行うこともある．グラフでこのことはこのチームあるいは対応する頂点を結ぶいくつかの辺 (A,B) を描くことである．こうしたグラフは多重辺を持つという．A と B を結ぶ辺を実際に描くかわりに辺を 1 つ描いてこの辺が何回繰り返されるか，その回数あるいは多重度を付加してもよい．次の図 16,17 は描き方の例である．

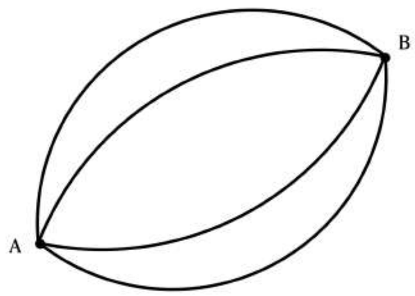

図 16　多重辺を用いて表したもの

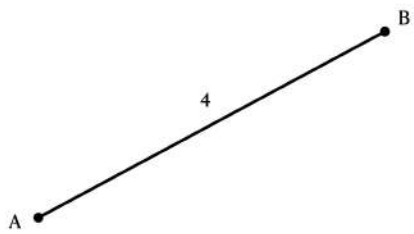

図 17　多重度を付加して表したもの

道路地図ではもちろん普通は 2 つの交差点間の各々の道路は別々に描く．ここで新たに次を定義する．

定義 2.7 (接合，局所次数)**.** グラフ G の孤立していない各頂点 A には A を端点とするいくつかの辺がある．これらの辺は A と接合しているという．こうした辺の個数を普通 $\rho(\mathrm{A})$ で表し A における局所次数という．

この定義から図 1 の局所次数は

$$\rho(\mathrm{A}) = \rho(\mathrm{B}) = \rho(\mathrm{D}) = \rho(\mathrm{E}) = 3\ ,\ \rho(\mathrm{F}) = 4\ ,\ \rho(\mathrm{C}) = 2$$

である．また，これより次を定義する．

定義 2.8 (奇頂点，偶頂点)**.** グラフには局所次数 $\rho(\mathrm{A}')$ が奇数である頂点と局所次数 $\rho(\mathrm{A}")$ が偶数である頂点の型がある．局所次数が奇数である頂点 $\rho(\mathrm{A}')$ を奇頂点，偶数である頂点 A"を偶頂点という．

多くの問題でグラフの辺の個数を見出すことが大切になる．もちろん直接に数えることもできるが，しばしば各頂点での辺の個数を数えて加える方が簡単である．すると各辺は 2 つの端点で 1 回ずつ 2 回数えられているので，グラフの辺の個数はこうした和の半分である．たとえば図 1 のグラフの

辺の個数は

$$\frac{1}{2}\left[\rho(\mathrm{A})+\rho(\mathrm{B})+\rho(\mathrm{C})+\rho(\mathrm{D})+\rho(\mathrm{E})+\rho(\mathrm{F})\right]=9$$

で，ちょうど辺を数えたものと一致する．一般にいうとグラフ G が n 個の頂点 $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\cdots,\mathrm{A}_n$ を持ちそれらの局所次数が $\rho(\mathrm{A}_1),\rho(\mathrm{A}_2),\cdots,\rho(\mathrm{A}_n)$ であれば，G の辺の個数 N 以上の議論により

$$N=\frac{1}{2}\left[\rho(\mathrm{A}_1)+\rho(\mathrm{A}_2)+\cdots+\rho(\mathrm{A}_n)\right] \tag{1}$$

である．この公式から，グラフの局所次数の和

$$\sum_{i=1}^{n}\rho(\mathrm{A}_i)=\rho(\mathrm{A}_1)+\rho(\mathrm{A}_2)+\cdots+\rho(\mathrm{A}_n) \tag{2}$$

は偶数である．つまり辺の 2 倍であることがわかる．

図 1 を再びみると，A,B,D,E は奇頂点，C と F は偶頂点である．これらの頂点の和をアルファベット順にとると，

$$3+3+2+3+3+4=18$$

である．この和は奇数が 4 個あるので偶数である．一般に整数の和が奇数か偶数かは偶数の項を無視して，奇数の項が偶数か奇数かによって和の偶数，奇数が決まる．この事実を和 (2) が偶数であることに適用すると次を得る．

定理 2.9. グラフには奇頂点が偶数個ある．

0 は偶数だから，この定理 2.9 は奇頂点がないときも含んでいる．また，局所次数に関する特別なグラフとして次を定義する．

定義 2.10 (正則グラフ)**.** 局所次数がすべて等しいような $\rho(\mathrm{A}_1)=\rho(\mathrm{A}_2)=\cdots\rho(\mathrm{A}_n)=r$ であるグラフを次数 r の正則グラフという．(1) の公式によりこの場合，辺の個数は

$$N=\frac{1}{2}\,nr$$

である．次の図 18,19 は次数 3 および 4 の正則グラフである．

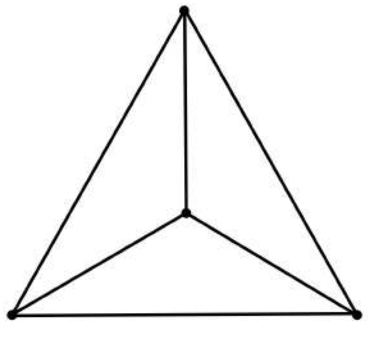

図 18　次数 3 の正則グラフ

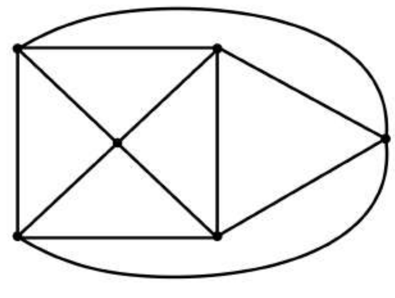

図 19　次数 4 の正則グラフ

n 個の頂点を持つ完全グラフ U_n では各頂点から他への $n-1$ 個の辺があるので，U_n は $n-1$ 次の正則グラフである．空グラフ O_n は各頂点で $\rho(\mathrm{A})=0$ となるのでもちろん正則である．

2.7　連結グラフ

グラフ G をまたここで道路地図であると考える．ただし G は平面グラフであるとはかぎらないとする．G のある頂点 A から G に沿って旅行をする．まず道路あるいは辺 (A,B) に沿ってある交差点 B へ行き，次に他の連絡道路 (B,C) 上を B から C へと，など歩く．この道路に沿ってのテキトーな歩きには何の制限もなく，同じ場所を何回も通過するだろうし，また同じ道路をふたたび通ることもある．この旅行である頂点 T に達したとき，T はそのグラフで A に連なっているという．これは，A から T への経路があるということである．同じ場所を 2 回以上通ったとき，ぐるりと回る経路を通らなければ A から T へもっと直接に旅行できる．どの頂点も 2 回は通らない G の経路を弧という．たとえば，次の図 20 の経路は弧である．

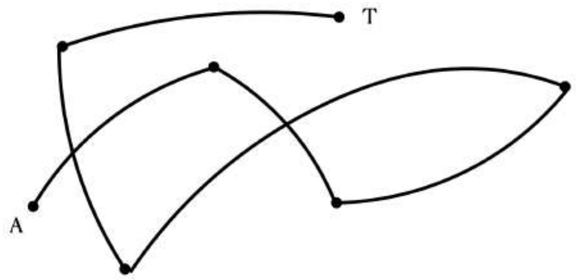

図 20　弧の例

同じ頂点を何回も通ることはあっても，同じ道路は決して繰り返さない経路を道という．たとえば，次の図 21 の経路は道である．

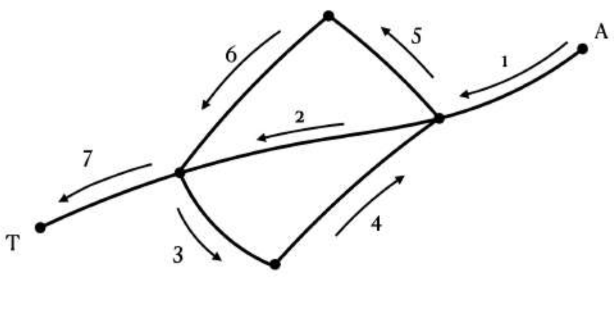

図 21　道の例

出発点に戻る道は周遊道といい，出発点に戻る弧を回路という．すなわち，周遊道はある頂点で自身と交わり得るが，回路は出発点が終点で，ここでのみ交わる．図 1 のグラフでこれらの概念を考え

ると辺の列 ADFEB は弧であり，列 AFDEFB は道である．周遊道は AFEDFBCA で，ACBFEDA は回路である．

ここで新たに次を定義する．

定義 2.11 (連結グラフ)**.** グラフはすべての頂点がどの他の頂点からも弧で結べるとき連結グラフという．

空グラフ以外のこれまで図示したグラフは連結である．グラフが連結でなければ与えられた 1 つの頂点 A からすべての頂点へ弧で結ぶことはできない．頂点 A から弧で到達できる頂点とそれらの接合している辺を合わせて，A の連結成分という．このようにしてグラフはいくつかの連結成分に分かれ，別の成分を結ぶ辺や弧は存在しない．

2.7.1　ケーニヒスベルクの橋の問題

グラフに関する初めての論文はオイラーによって書かれた．そのとき，彼はいわゆるケーニヒスベルクの橋の問題と呼ばれるパズルの議論で論文をはじめている．内容は次のようなものである．東独にあるケーニヒスベルク (現在のカリーニングラード) の町はプレーゲル川の川岸とその川中の 2 つの島にある．町の部分部分は 7 つの橋で結ばれている．図 22 にそれを示した．

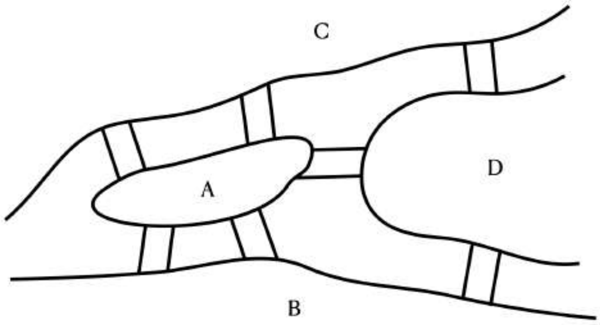

図 22　道の例

日曜日ごとにドイツの町のどこでもそうであるように町の人々は町を一巡り散歩する．そこで，家から出発してどの橋もちょうど 1 回渡って家へ戻るような散歩を計画できるものかどうかという問題が起こった．図 22 に示したように町の 4 つの部分は A,B,C,D の文字で表されている．いま，渡る橋だけが問題なのであるから A,B,C,D を頂点とし，椅に対応する連結辺からなるグラフを考えればよい．それを表したのが次ページの図 23 である．

2.7.2　ケーニヒスベルクの橋の問題の解

オイラーはこのグラフが 1 つの周遊道で完全に巡れないことを示した．すなわち，どの頂点よりはじめるにしろ，同じ橋を 2 度以上渡らないといけない限りグラフ全体を覆い元に帰ることはできない．こうした道は各頂点にその頂点から出発したと同数回戻ってくるので，各頂点は偶数個の辺を持っている．ところがケーニヒスベルクの地図を表すグラフはこの性質を満たしていない．よって，どの橋もちょうど 1 回渡って家へ戻るような散歩は計画できない．

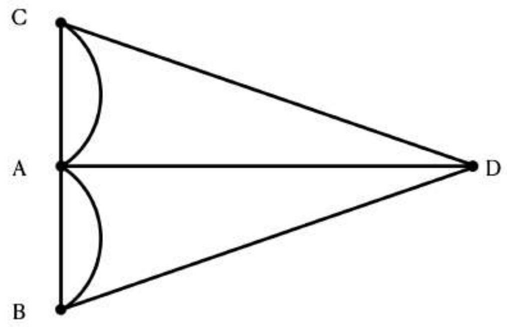

図 23　図 22 をグラフとして表したもの

2.8　オイラーグラフ

ケーニヒスベルクの橋に関する諸論のあとでオイラーは次のようなグラフの一般論を扱っている．すべての辺を 1 回通る周遊道 $\mathcal{P}$ が存在するグラフはどんなグラフか．こうした道は現在はオイラー線と呼ばれ，オイラー線を持つグラフはオイラーグラフと呼ばれる．オイラー線を持つためにはグラフは連結でなければならない．ケーニヒスベルクの橋の問題の議論により，どのオイラー線も各頂点で同数回出たり入ったりする．すなわちすべての局所次数は偶数である．かくてグラフがオイラー線を持つための 2 つの必要条件は連結性とすべての局所次数の偶数性である．オイラーはこれらの条件がまた十分条件であることを示した．

定理 2.12. 局所次数が偶数である連結グラフはオイラー線を持つ．

証明. ある頂点 A から出発して，これまで通らなかった辺上を次々と可能な限りたどって道 $\mathcal{L}$ をつくる．この操作はしばらくすると新しい辺がなくなるので停止する．しかし各頂点には偶数個の辺があるので，始点 A を除いては，いつでもある頂点へ行ければその頂点からの出口が必ずある．かくて $\mathcal{L}$ は A に戻って止まらなければならない．(下の図 24 参照)

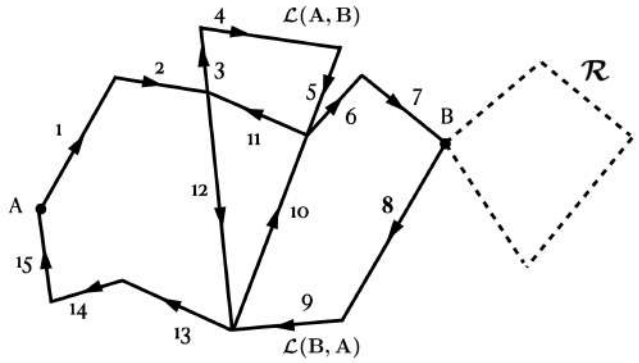

図 24　証明理解の手助け 1

もし $\mathcal{L}$ がすべての辺を通っていれば望みのオイラー線となる．もし $\mathcal{L}$ 上にまだ $\mathcal{L}$ が通っていない辺のあるような頂点 B があったとする．実は，$\mathcal{L}$ は B で偶数個の辺を持っているから，$\mathcal{L}$ に属さな

い B の辺は偶数個あり，同じことはまだ通らない辺にあるすべての頂点についてもいえる．そこで B から今度は $\mathcal{L}$ に属さない辺のみを用いて，道 $\mathcal{R}$ をはじめる．ふたたびこの道は B に戻って止まる．すると，まず A から $\mathcal{L}$ の一部分の道 $\mathcal{L}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ に沿って B まで行き，周遊道 $\mathcal{R}$ を巡り，そして B から $\mathcal{L}$ の $\mathcal{L}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ の残りの部分に沿って A に戻る大きな周遊道が得られる．(前ページの図 24 参照) こうしてもまだグラフが覆われなければ，また上のようにグラフを拡大し，これを繰り返していけばついにオイラー線ができる． □

周遊道をやめる，つまり道は元へ必ず戻るという条件を落とすこともある．A からはじめて，他の頂点 B で終わるすべての辺を 1 回通る道 $\mathcal{L}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ が存在すると，$\mathcal{L}$ は A からある辺へ出発し何回か A に戻り，また出て行く．よってこの道が A で終わらなければ頂点 A は奇頂点である．同様にして B も奇頂点で他の頂点は偶頂点である．このことから次のことがわかる．

定理 2.13. 連結グラフにすべての辺をちょうど 1 回覆う道 $\mathcal{L}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ がある必要十分条件は，A と B のみが奇頂点となることである．

証明. 新しい辺 (A,B) を加えてやると，各頂点は偶頂点となる．新しいグラフはオイラー線 $\mathcal{P}$ を持つことが前の定理からわかり，辺 (A,B) を $\mathcal{P}$ から落とすと残りの道が $\mathcal{L}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ となる．例として図 1 のグラフを見ると F と C のみが奇頂点であり，被覆する道は FCDBAEC である．以上の一般化を考える．あるグラフで，どの 2 つも共通の辺を持たず，それらすべての道を合わせるとちょうどグラフ全体となるような道の最小個数を決定する．グラフのこうした道の族があったとすると，すべての奇頂点はそれらのどれか 1 つの出発点か終点かである．そうでなければ頂点は偶頂点である．小節 2.6 で分かったように奇頂点の個数は偶数であったから $2k$ とする．するといま述べたことから辺を覆う道 $\mathcal{L}$ のどの族も少なくとも k 個の道を含む．次に，k 個の道に対して奇頂点の個数は $2k$ 個で十分であることを示す．

定理 2.14. $2k$ 個の奇頂点を持つ連結グラフには，合わせると，そのグラフのすべての辺をちょうど 1 回通るような k 個の素な道がある．

証明. グラフの頂点を

$$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots \mathrm{A}_k \ ; \ \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \cdots \mathrm{B}_k$$

と順序は任意に 2 組に分かれる．k 個の辺

$$(\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1), (\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2), \cdots, (\mathrm{A}_k, \mathrm{B}_k)$$

をグラフに加えるとグラフの頂点はすべて偶数となり，オイラー線 $\mathcal{P}$ が存在する．$\mathcal{P}$ からこれらの辺を落とすと $\mathcal{P}$ は k 個の分かれた道になり，それらは元のグラフの辺を覆う．例として図 1 をとると，A,B,D,E の 4 個の奇頂点があり，これは 2 つの道 EBFA,BCADFED で覆われる． □

□

3 地図の色分け

この節では，数学上の有名な問題である地図の色分け問題について考える．

3.1　4 色問題

多辺形グラフは，面を国あるいは州で，無限面がそれらを囲む海であると見ると地図となる．よい地図では国は海もいれて，異なる色で互いに区別できるように塗り分けてある．もし色が数多くあれば色の配置は特に問題ではないが，与えられた地図の国々を色分けするに十分な色の最小数を見出す問題は非常に困難である．これに関して 4 色問題とはすべての地図は 4 色を用いれば間違いなく色分けできるという有名な予想である．

まず，あるグラフに対して 4 色問題が本質的であることを指摘する．例として図 25 のように 4 面体グラフをとる．

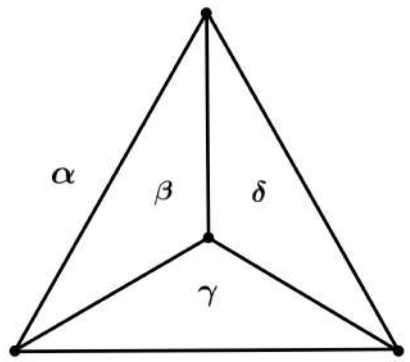

図 25　四面体グラフ

以下，色はギリシャ文字 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \cdots$ で表す．普通どの文字がどの色を示すかはどうでもよいことである．4 面体では無限面あるいは外部域は色 α であるとする．すると 3 つの面はそれらは共通の境界を持つので異なる色でなければならない．次にできるだけ色を少なく地図を色分けするのに，2 辺のみが出会う頂点は問題にしないでよいことがわかる．なぜならば，a がそうした頂点であるとき，その辺を色分けの方法は変えずに，1 辺に合わせ頂点 a を省くことができるからである．(図 26 参照)

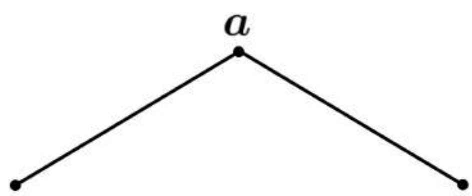

図 26　議論理解の手助け 1

この注意によって，グラフとして各頂点に少なくとも 3 つの辺があるものを考察すれば十分であ

る．しかし，ここでもっと大胆な仮定をすることができる．任意の多辺形グラフのある個数の色による色分けは，グラフが次数 3 の正則グラフ，つまり各頂点にはちょうど 3 つの辺がある場合のみを考えればよい．言い換えれば，次数 3 の正則グラフに対して色分け問題が解けるならば，すべてのグラフに対して色分け問題は解ける．以下はその考察である．図 27 のようにある頂点 a に 3 個以上の辺があると仮定しよう．そしてこの a の周りに他の頂点へ届かないくらい小さな円周 C を描く．a と円周の内部にある辺の部分を除いて下の図 28 のように C を分割した辺で置き換える．新しい頂点はすべて 3 つの辺を持つ．新しいグラフ G_1 が色分けできたら，円周 C を点へ縮めると元のグラフの色分けとなる．3 つ以上の辺を持つ頂点のすべてでこの種の変形を続けると，任意のグラフの色分けの問題は次数 3 の正則多辺形のグラフの色分けの問題に還元される．

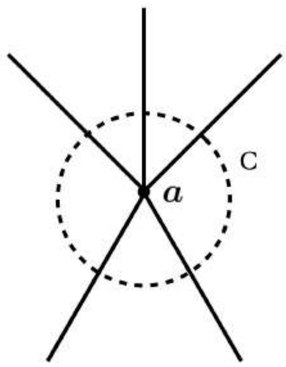

図 27　議論理解の手助け 2-a

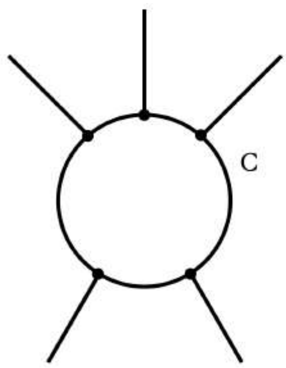

図 28　議論理解の手助け 2-b

次に次数 3 の正則グラフのみを考える．これに対しては有用な公式ができる．これは各頂点がちょうど 3 つの面の境界上にあるという観察に基づく．(下の図 29 参照)

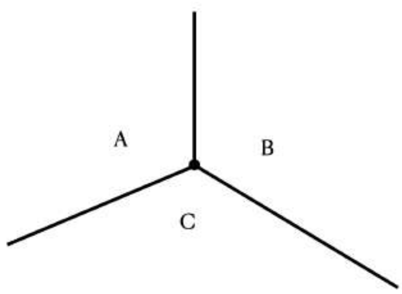

図 29　議論理解の手助け 3

よってすべての面上にある頂点の個数を数えると，それらは頂点の全体の個数の 3 倍である．ここで，以下のように文字を定義する．

- φ_i ： i 個の辺を持つ，つまり i 個の頂点を持つ，面の個数
- ν_v ： G の頂点の個数
- ν_e ： G の辺の個数
- ν_f ： G の面の個数

これを用いて次を得る．(本来，確かめることが必要である．)

$$3\nu_v = 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 4\varphi_4 + 5\varphi_5 + 6\varphi_6 + 7\varphi_7 + \cdots \tag{3}$$
$$2\nu_e = 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 4\varphi_4 + \cdots \tag{4}$$
$$\nu_f = \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \cdots \tag{5}$$

これらの (3) を辺々 2 倍，(4) を辺々 3 倍，(5) を辺々 6 倍すると次を得る．

$$6\nu_v = 4\varphi_2 + 6\varphi_3 + 8\varphi_4 + 10\varphi_5 + 12\varphi_6 + 14\varphi_7 + \cdots \tag{6}$$
$$6\nu_e = 6\varphi_2 + 9\varphi_3 + 12\varphi_4 + 15\varphi_5 + 18\varphi_6 + 21\varphi_7 + \cdots \tag{7}$$
$$6\nu_f = 6\varphi_2 + 6\varphi_3 + 6\varphi_4 + 6\varphi_5 + 6\varphi_6 + 6\varphi_7 + \cdots \tag{8}$$

この (6)，(7)，(8) をオイラーの公式

$$2 = \nu_v - \nu_e + \nu_f \;\leftrightarrow\; 12 = 6\nu_v - 6\nu_e + 6\nu_f$$

に代入すると次のようになる．

$$12 = 4\varphi_2 + 3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5 + -\varphi_7 - 2\varphi_8 - \cdots \tag{9}$$

ここで，残りの項はすべて負である．(9) の右辺は正でなければならないので次を得る．

次数 3 のグラフには，6 個より少ない辺で囲まれる面が存在しなければならない．

3.2　5 色問題

以下でグラフを 4 あるいは 5 色で色分けする可能性を調べる．上の結果から次数 3 の多辺形正則グラフ G を扱えばよく，またこのグラフは 6 個より少ない辺で囲まれる少なくとも 1 つの面を持っている．以下で 2,3,4 と 5 個の辺で囲まれる面を持つ場合を別々に扱う．どの場合でも次の 2 つを示す．

1. ある境界を除いてできるグラフは，3 時の正則グラフで前より面の数は減る
2. このように還元されたグラフが 5 色以上を用いずに色分けできるならば元のグラフでも同じことができる

この還元によりいつでも次数 3 の正則グラフができるので，単純化が行われた後でも，6 個以下の辺で囲まれる面が確かに存在することが確かめられ，グラフを順次小さい数の領域を持つグラフへと直していくことができる．

2 重辺 (a) 第 1 段階で G がいつでも 2 つの辺で囲まれる面をもたないように，単純化されるということを示す．次頁の図 30 のように a と b の間に 2 重辺があればそれらのどちらかを除き，残り 1 つの辺と第 3 の辺 (a,c) と (b,d) を a と b において結合して 1 つの辺 (c,d) で置き換える．新しいグラフ G_1 はふたたび次数 3 の正則グラフになる．

(b) G_1 が色分けできたとすると，辺 (c,d) の両側に異なる色 α と β と 2 重線を元に戻して，囲まれた面 A を第 3 の色 γ で塗ればよい．

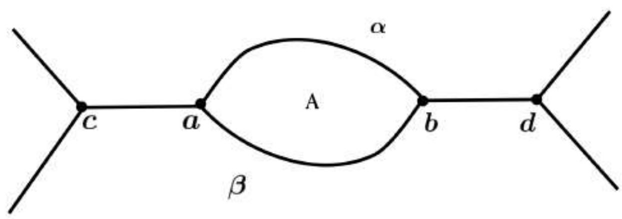

図 30　議論理解の手助け 4

3 角形の面（a）グラフは 3 角形の面を含まないように単純化される．D が他の 3 つの面 A,B,C に接しているこうした面とする．(a,b) が C と D との境界辺とする．(図 31 参照) 辺 (a,b) を除き頂点 a の他の 2 つの辺を結合して 1 つの辺とし，b でも同様にする．還元されたグラフ G_1 はかくて次数 3 の正則グラフである．

（b）G_1 が面 A が色 α，面 B が色 β そして面 C+D が γ の色で色分けされたとする．辺 (a,b) が戻されると D に第 4 の色 δ を与えればよい．

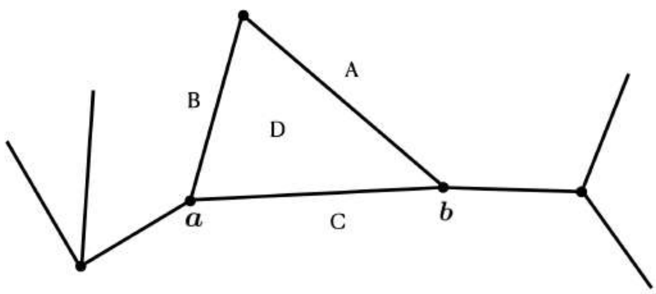

図 31　議論理解の手助け 5

短形の面（a）境界に 4 つの辺がある面を除くのは少しやっかいである．F がこうした面で A,B,C,D が次頁の図 32 のような隣の面であるとする．A と C は同一面の異なる部分であるかもしれないし，また，字頁の図 33 に示したようにそれらは共通の境界線 (m,n) を持つかもしれない．どちらにしろ，面 A $\cup$ C は B と D とが共通の境界を持たないように切り離している．そこで辺 (a,b) と (c,d) を除いて，$(a_1,a),(a,c),(c,c_1)$ の辺を結合して 1 つの辺 (a_1,c_1) にする．同様に $(b_1,b),(b,d),(d,d_1)$ を 1 つの辺 (b_1,d_1) に結合する．すると新しいグラフ G_1 は次数 3 の正則グラフで，B $\cup$ F $\cup$ D が 1 つの面となる．

（b）G_1 が色分けできて，B $\cup$ F $\cup$ D が色 α を持つとする．すると A と C は，同じかもしれないが，色 β と γ を持つ．すると 2 つの辺 (a,b) と (c,d) を元に戻し F には第 4 の色 δ を用いればよい．

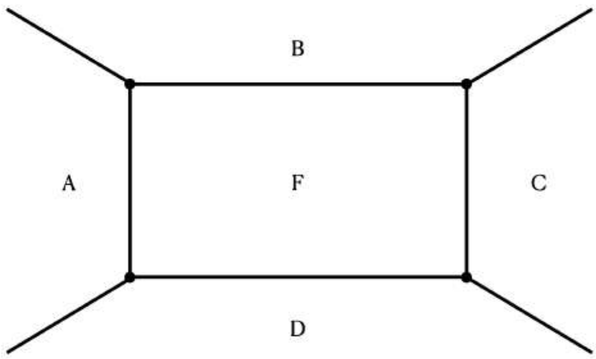

図 32　議論理解の手助け 6

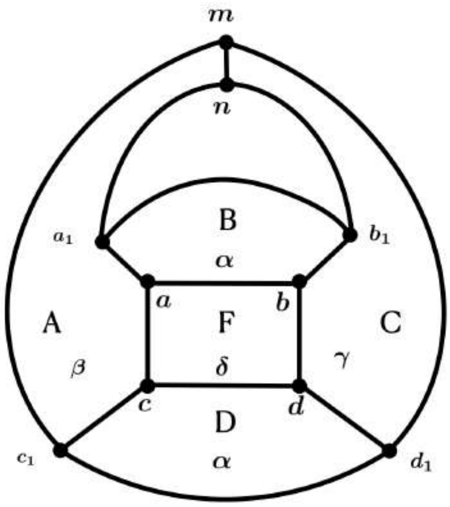

図 33　議論理解の手助け 7

5 変辺形の面（a）5 つの他の面 A,B,C,D と図 34 のように隣り合う面 F があったとする．短形の面のときと同様に，たとえば A と C という互いに反対に位置する面の対でそれらは同一面の部分でもなく，共通の境界も有しないものが存在する．辺 (a, b) と (c, d) を除く．(図 34 参照) 次に，頂点 a, b, c, d を除き，グラフの縮小を行うと，できるグラフはまた次数 3 の正則グラフである．

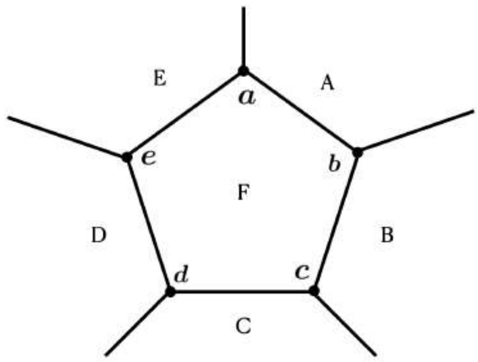

図 34　議論理解の手助け 8

(b) この還元されたグラフ色分けできたとし，$A \cup F \cup C$ の面は色 α であったとする．3 つの面 B,D,E には 3 つの異なる色 β, γ, δ が必要である．もし 5 色を用いて良いなら 2 つの辺 (a, b) と (c, d) を元に戻して，F に第 5 の色 ϵ を与える．しかし 4 色しかない場合にはこの還元法はいつでも可能にはならない．

この議論から，2,3,4,5 個の辺を持つ面のある正則グラフは 5 色あれば，色分けの問題は面の個数の小さいグラフの色分けの問題にいつでも還元できることがわかる．前小節の終わりに述べた観察から，正則グラフは少なくとも 1 つのこうした小さな面を持つので，この還元はグラフが 5 個あるいはそれ以下の面しか持たなくなるまで続けることができる．よって 5 色以上用いると確かに色分けすることができる．以上より次が証明された．

定理 3.1 (5 色定理)**.** 平面グラフはいつでも 5 色以上で色分けできる．

この議論は 4 色のみを持つときには適用できない．前にわかったように，5 辺形はこの場合還元できない．各面が少なくとも 5 つの境界辺を持つ正則グラフが現れると，我々の還元法は続かなくなる．このとき，2,3 および 4 個の境界辺を持つ面は存在しないので，

$$\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$$

である．式 (9) からこうした還元できないグラフは少なくとも 12 個の 5 角形を持たなければならない．事実は 36 個以下の面を持つ任意の地図は 4 色で色分けできることが示されている．

3.3　4 色問題の結論

では，任意の地図が 4 色で色分けできるか，という問題についてだが結論だけを述べればできることが証明されている．しかしその証明を追うことはここではしない，できない．この証明はスーパーコンピュータを用いてなされたからである．そしてこの証明は “美しくない” としばしば言われる．それはスーパーコンピュータの使用，すなわちある種の力業での証明だからである．

数学では複雑かと思われる問題に対し，短く，簡潔に証明することをエレガントだと表すことがあるがこの証明は力業だ，と揶揄を込めてエレファント (象) と言われることがある．

今後の課題

今回，グラフ理論の導入からちょっとした応用例を学んだが，この研究内ではまとめることができなかった応用例の 1 つとしてオイラーの多面体公式の導出やプラトン立体，すなわち正多面体について-正多面体は 5 つしか存在しない-というものがある．これについて考えることで研究内で触れた 4 色問題，5 色問題への理解が上がるのでまとめたかったが時間が足りなかった．また，他にもグラフ理論はゲーム理論などにも繋がりがある (繋がりを持てる)．その紹介も間に合わなかった．

今後はこのゲーム理論の単純さゆえの応用の広さを生かすべく代数的に扱えないか，また，演算を定義することで機械的な計算から新たに事実を考えられないか，などの考察を進めていきたい．

参考文献

[1]　O. オア 著　野口広 訳 , グラフ理論, 株式会社河出書房新社,1970.