虚数回微分への準備

鶏徳亮

2020 年 6 月 12 日

目 次

1　はじめに

私はこれまで, 研究というよりも調べ学習といった方がふさわしいものしかやったことがなかった. そして, 今回こそは自分で考えたり考察したものにしようと考えていた. しかし, 思いのほか研究テーマが決まらず, 気づいたら数か月経ってしまっていた. そんなある日, 私はふと気になったことがあった. 虚数回の微分, 積分ってどうなるのだろう, と. 思い立った私は, すぐに持っていた数学書を読み, 分数回微分についての内容を読んだ. 今回は, 分数回微分について調べることにし, 後ほど余力があった場合に解析接続で虚数回微分について考えることにする.

2　分数回微分の準備

まず, 分数回微分の前段階として, いくつかの命題を示しておくことにする.

2.1　命題 1

命題 1

$a,\ b$ が有限, $K(x,y), G(x,y)$ は 2 変数関数として連続で x について偏微分可能とする. f が連続なら $Kf(x), Gf(x)$ は微分可能で,

$$\frac{d}{dx}Kf(x) = \int_a^b \frac{\partial K(x,y)}{\partial x} f(y)dy, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx}Gf(x) = G(x,x)f(x) + \int_a^x \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} f(y)dy \tag{2}$$

証明

$$\frac{Kf(x+h) - Kf(x)}{h} = \int_a^b \frac{K(x+h,y) - K(x,y)}{h} f(y)dy$$

であるので, a, b が有限で K, f が連続なことから (1) 式が得られる.
G, f の連続性と積分の平均値の定理より

$$\begin{aligned}
\frac{Gf(x+h) - Gf(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} G(x+h,y)f(y)dy - \int_a^x G(x,y)f(y)dy\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} G(x+h,y)f(y)dy - \int_a^x (G(x+h,y) - G(x,y))f(y)dy\right) \\
&= G(x+h, x+\theta h)f(x+\theta h) + \int_a^x \frac{G(x+h,y) - G(x,y)}{h} f(y)dy
\end{aligned}$$

となる. よって (2) が成立する. また, ここで新たに不定積分の定義を行う.

2.2　定義 1

$a > 0$ とする.

$$I^a f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-t)^{a-1} f(t)dt$$

を $f(x)$ の (原点 0 からの)a 階の不定積分という. $f(x)$ は $x > 0$ で定義され, そこで連続とする.

3　参考文献

・数理の玉手箱/2010 年 10 月 16 日 初版第一刷発行/藤井一幸 (編集), 鈴木達夫, 浅田明, 待田芳徳, 岩井敏洋/遊星社