Levesgue 積分

BV18076　森 大樹

2020 年 6 月 12 日

目次

1 はじめに

Levesgue 積分という代になってるが Levesgue 積分の基となっている測度論について今回は理解を深めようと思っている.

2 勉強背景

確率論を使うような職業につく可能性があり理解をしたいと思いました.

3 有限加法的測度

有限加法的測度が定義される集合族, 有限加法族がある
有限加法族とは与えられた空間 X の部分集合の族 $\Im$ が以下の三つの条件を満たすときにいう.

1. $\phi \in \Im$
2. $A \in \Im$ならば $A^c \in \Im$
3. $A, B \in \Im$ならば $A \cup B \in \Im$

上の三つの性質から以下の性質を得る.

1. $X \in \Im$
2. $\Im$ に属する集合の和, 差, 交わりをとる演算を有限回行って得られる集合は $\Im$ に属する.

証明. (自分で書いたもの)

1. $A \in X$ であるから,$A^c \in X$ である. 従って, $A \cup A^c = X$ となる. さらに, $\phi \in X$ であるので,$X \in \Im$ となる.
2. 集合の和の演算について $A, B \in \Im$ とする. $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ となる. $A^c, B^c \in \Im$ となるから, $A^c \cup B^c \in \Im$ となる. $D = A^c \cup B^c \in \Im$ とすれば, $D^c \in \Im$ となる. 従って, $(A^c \cup B^c)^c \in \Im$ となるから, $A \cap B \in \Im$ となる. 次に, 集合の差の演算について $A, B \in \Im$ とする. $A - B = A \cap B^c$ となる. $A, B^c \in \Im$ であるから, 差の演算を和の演算とすることができるので, $A - B \in \Im$ となる.

□

定理 3.1. $Z = X \times Y$(直積空間) とし, $\Im_1, \Im_2$ をそれぞれ, X, Y の部分集合の有限加法族とすると, Z の部分集合で

$$K = E \times F \quad (E \in \Im_1, F \in \Im_2)$$

なる形の集合の有限個の直和として表せるものの全体 $\Im_3$ は有限加法族である.

証明. $\phi \in \Im_3$ となることは明らか.$(\phi = \phi \times \phi,\ \phi \in \Im_1, \phi \in \Im_2)$ また, $K = E \times F(E \in \Im_1, f \in \Im_2)$ ならば $K^c(= Z - K) \in \Im_3$. なぜならば,

$$\begin{aligned} Z &= (E + E^c) \times (F + F^c) \\ &= (E \times F) + (E^c \times F) + (E \times F^c) + (E^c \times F^c) \quad (E^c = X - E, F^c = Y - F) \end{aligned}$$

だから

$$K^c = (E \times F)^c = (E^c \times F) + (E \times F^c) + (E^c \times F^c) \in \Im_3$$

また

$$A = A_1 + A_2 \text{で} A_1, A_2 \in \Im_3 \text{ならば} A \in \Im_3 \tag{1}$$

なることも $\Im_3$ の定義から明らかである. 次に

$$A, B \in \Im_3 \text{ならば} A \cap B \in \Im_3 \tag{2}$$

なることを示そう.$A, B \in \Im_3$ により $A = K_1 + K_2 + \cdots + K_n, B = H_1 + H_2 + \cdots + H_m$, 各 K_i, H_j は $K = E \times F$ の形の集合と表される. このとき $K_i \cap H_j$も $K = E \times F$ の形の集合であって,

$$A \cap B = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} K_i \cap H_j$$

となるから $A \cap B \in \Im_3$ である. 以上のことを使って

$$A \in \Im_3 \text{ならば} A^c \in \Im_3 \tag{3}$$

$$A, B \in \Im_3 \text{ならば} A \cup B \in \Im_3 \tag{4}$$

を証明する.

de Morgan(ド・モルガン) の公式より

$$A^c = K_1^c \cap K_2^c \cap \cdots \cap K_n^c$$

を得られる. $K_i^c \in \Im_3 (i = 1, 2, \cdots, n)$ だから, (2) を繰り返し用いると

$$K_1^c \cap K_2^c \cap \cdots \cap K_n^c \in \Im_3$$

すなわち, $A^c \in \Im_3$ を得る. 従って, (3) を得る. (4) を証明する.

$$A \cup B = A + (A^c \cap B)$$

となるので, $A + (A^c \cap B) \in \Im_3$ となることを証明する. (1),(2),(3) を用いると,

$$A,\ A^c, B \in \Im_3 \text{となるから (2) より}, A^c \cap B \in \Im_3, \text{(1) より}, A + (A^c \cap B) \in \Im_3$$

従って, $A \cup B \in \Im_3$ となる. (4) を得る.

□

定義. 空間 X とその部分集合の有限加法族 $\Im$ があって, $\Im-$ 集合関数 $m(A)$ が以下の二つの条件を満たすとき, m を ($\Im$の上の) 有限加法的測度という.

1. すべての $A \in \Im$ に対して $0 \leqq m(A) \leqq \infty$, 特に, $m(\phi) = 0$
2. $A, B \in \Im$, $A \cap B = \phi$ ならば $m(A + B) = m(A) + m(B)$

上の二つの性質から, 以下のことが証明される.

1. $A_1, \cdots, A_n \in \Im, A_j \cap A_k = \phi (j \neq k)$ ならば $m\left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} m(A_j)$　(有限加法性)
2. $A, B \in \Im, A \supset B$ ならば $m(A) \geqq m(B)$(単調性)
   特に, $m(B) < \infty$ ならば $m(A - B) = m(A) - m(B)$
3. $A_1, \cdots, A_n \in \Im$ならば $m\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leqq \sum_{j=1}^{n} m(A_j)$

証明. 1.（a）$n=1$ のとき, 成り立つ.

（b）$n=t$ のときに $A_1,\cdots,A_t\in\Im, A_j\cap A_k=\phi(j\neq k)$ ならば $m\left(\sum_{j=1}^{t}A_j\right)=\sum_{j=1}^{t}m(A_j)$ が成り立つと仮定すると,$n=t+1$ のとき, $A_1,\cdots,A_{t+1}\in\Im, A_j\cap A_k=\phi(j\neq k)$ ならば, $B=A_1+\cdots+A_t$ とすると, 定義の 2 より, $A_{t+1},B\in\Im$, $A_{t+1}\cap B=\phi$ となるので, $m(A_{t+1}+B)=m(A_{t+1})+m(B)$ が成り立つから, $n=t+1$ のときも成り立つ.

(a),(b) より任意の自然数 n について $A_1,\cdots,A_n\in\Im, A_j\cap A_k=\phi(j\neq k)$ ならば $m\left(\sum_{j=1}^{n}A_j\right)=\sum_{j=1}^{n}m(A_j)$

2. $A\supset B$ ならば $A=(A-B)+B$ と書けるから, 定義の 1, 2 より, $(A-B),B\in\Im$ であり, $(A-B)\cap B=\phi$ であるから, $m(A)=m(A-B)+m(B)$ となる. ${}^{\forall}A\in\Im$ に対して, $0\leqq m(A)$ が成り立つから, $m(A)=m(A-B)+m(B)\geqq m(B)$ が成り立つ. 特に, $0\leqq m(B)<\infty$ ならば, $m(A)=m(A-B)+m(B)$ の両辺から $m(B)$ を引くと $m(A)-m(B)=m(A-B)$ が成り立つ.

3. $B_1=A_1, B_k=A_k-(A_1\cap\cdots\cap A_{k-1})$ $(k=2,\cdots,n)$ とおくと,$B_j\cap B_k=\phi$ $(j\neq k), B_j\supset A_j, \sum_{j=1}^{n}B_j=\bigcap_{j=1}^{n}A_j$ だから, 上 (定義ではない方) の 1,2 より,

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{n}A_j\right)=m\left(\sum_{j=1}^{n}B_j\right)=\sum_{j=1}^{n}m(B_j)\leqq\sum_{j=1}^{n}m(A_j)$$

□

有限加法族 $\Im$ の上の有限加法測度 m が条件:

$$\begin{cases} A_1,A_2,\cdots\in\Im(\text{可算無限個}),\ A_j\cap A_k=\phi\ (j\neq k)\ \text{のとき} \\ A=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n\ (\text{は}\Im\text{に属するとは限らないが, もしもこれが})\in\Im \\ \text{ならば}\ m(A)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)\ \text{となる.} \end{cases}$$

を満たすとき, m を有限加法族 $\Im$ の上で完全加法的な測度という.

例. $X=R^N$, $\Im=\Im_N$ とし, m を $f_1(\lambda),\cdots,f_N(\lambda)$ を R^1で単調増加な実数値函数で定数ではないものとし, 有界な区間 $I=(a_1,b_1]\times\cdots\times(a_N,b_N](-\infty<a_\nu<b_\nu<\infty)$ に対して

$$m(I)=\prod_{\nu=1}^{N}\{f_\nu(b_\nu)-f_\nu(a_\nu)\}$$

有界でない区間 I に対しては

$$m(I)=\sup\{m(J); J\ \text{は}\ I\ \text{に含まれる任意の有界区間}\ \}$$

と定義し, 空集合 ϕ に対しては $m(\phi)=0$, 区間塊 $E=I_1+\cdots+I_n$ に対しては

$$m(E)=m(I_1)+\cdots+m(I_n)$$

と定義する. この m は $\Im_N$ の上の有限加法的測度である.

定理 3.2. 上の例の m が $\Im_N$ の上で完全加法的であるための必要十分条件はすべての $f_\nu(\lambda)$ が右連続なことである

証明. 必要条件. $f_1(\lambda)$ が右連続なことを証明するには, 任意の実数 a と

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > \cdots > a, \lim_{n\to\infty} \lambda_n = a$$

なる任意の実数列 $\{\lambda_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f_1(\lambda_n) = f_1(a)$ となることを言えばよい. 各 ν に対して, $f_\nu(\lambda)$ が定数でないから $-\infty < f_\nu(a_\nu) < f_\nu(b_\nu) < \infty$ なる $a_\nu, b_\nu (a_\nu < b_\nu)$ がある.

$$I_n = (\lambda_{n+1}, \lambda_n] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_N, b_N],$$
$$I = (a, \lambda_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_N, b_N]$$

とおくと $I_n, I \in \Im_N \subset \Im_N$, $I = \sum_{n=1}^{\infty} I_n$ だから, m が $\Im_N$ の上で完全加法的なことにより

$$m(I) = \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} m(I_k)$$

今 $M = \prod_{\nu=2}^{N} \{f_\nu(b_\nu) - f_\nu(a_\nu)\}$ とおくと $M > 0$ で, 上の式において

$$m(I) = M\{f_1(\lambda_1) - f_1(a)\}, \quad m(I_k) = M\{f_1(\lambda_k) - f_1(\lambda_{k+1})\}$$

だから

$$\begin{aligned} f_1(\lambda_1) - f_1(a) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \{f_1(\lambda_k) - f_1(\lambda_{k+1})\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \{f_1(\lambda_1) - f_1(\lambda_n)\}; \end{aligned}$$

すなわち $f_1(a) = \lim_{n\to\infty} f_1(\lambda_n)$
$f_2(\lambda), \cdots, f_N(\lambda)$ の右連続なことも同様にして証明される.
十分条件.

1. 任意の $I \in \Im_N$ と任意の $\alpha < m(I)$ に対して, 有界な $J \in \Im_N$ で

$$\bar{J} \subset I, m(J) > \alpha \quad (\bar{J}\text{は } J \text{ の閉包を表す})$$

となるものが存在する.
$I = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_N, b_N]$ とする. 各 $\nu (= 1, \cdots, N)$ に対して数列 $\{a_{\nu n}; n = 1, 2, \cdots\}$ を

$$b_\nu > a_{\nu 1} > a_{\nu 2} > \cdots > a_{\nu n} > \cdots > a_\nu \quad \lim_{n\to\infty} a_{\nu n} = a_\nu (\geqq -\infty)$$

なるようにとり, また数列 $\{b_{\nu n}; n = 1, 2, \cdots\}$ を

$b_\nu < \infty$ ならば $b_{\nu n} = b_\nu (n = 1, 2, \cdots)$ と定義し,
$b_\nu = \infty$ ならば $a_{\nu 1} < b_{\nu 1} < b_{\nu 1} < b_{\nu 2} < \cdots < b_{\nu n} < \cdots < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} b_{\nu n} = \infty$
となるように定める.

$I_n = (a_{1\nu}, b_{1\nu}] \times \cdots \times (a_{Nn}, b_{Nn}]$ とおくと$\bar{I}_n \subset I$ であって, m のて定義と, $f_\nu(\lambda)$ の右連続なことにより $\lim_{n\to\infty} m(I_n) = m(I)$. だから n を十分大きくとれば $m(I_n) > \alpha$; この I_nを J すればいい.

2. 任意の $E \in \Im_N$ と任意の $\alpha < m(E)$ に対して, 有界な $F \in \Im_N$ で

$$\bar{F} \subset E, \quad m(F) > \alpha$$

となるものが存在する.

$E \in \Im_N$は $E = I_1 + \cdots + I_n (I_j \in \Im_N)$ と表される. まずすべての j に対して $m(I_j) < \infty$ のときは, 1 により各 j に対して有界な $J_j \in \Im_N$ で

$$\bar{J}_j \subset I_j, \quad m(J_j) > m(I_j) - \frac{1}{n}\{m(E) - \alpha\}$$

となるものがある. $I_1, \cdots, I_n$ がどの二つも互いに素だから $J_1, \cdots, J_n$ も互いに素であり, $F = J_1 + \cdots + J_n$ とおくとこれは有界で $F \in \Im_N$. しかも

$$\bar{F} = \bar{J}_1 + \cdots + \bar{J}_n \subset I_1 + \cdots + I_n = E$$

$$m(F) = \sum_{j=1}^{n} m(J_j) > \sum_{j=1}^{n} m(I_j) - \{m(E) - \alpha\} = \alpha$$

となるから F は求めるものである. 次に $m(I_j) = \infty$ なる j があるとき, 例えば $m(I_1) = \infty$ とすると 1 により有界な $J_1 \in \Im_N$ で

$$\bar{J}_1 \subset I_1, \quad m(J_1) > \alpha$$

なるものがある. $F = J_1$ とすれば $\bar{F} \subset I_1 \subset E$, $m(F) > \alpha$ となる.

3. $E \in \Im_N$, $I_n \in \Im_N (n = 1, 2, \cdots), E \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ ならば

$$m(E) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) \tag{1}$$

各 I_n は $I_n = (a_{n1}, b_{n1}] \times \cdots \times (a_{nN}, b_{nN}]$ なる形だから, $f_\nu(\lambda)$ の右連続なことにより, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,$\delta_n > 0$ を適当にとって

$$J_n = (a_{n1}, b_{n1} + \delta_n] \times \cdots \times (a_{nN}, b_{nN} + \delta_n]$$

$(b_{n\nu} = \infty$ のときは $b_{n\nu} + \delta_n = \infty)$ なる区間が

$$m(J_n) \leqq m(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \quad (\text{両辺とも } \infty \text{ のこともある}) \tag{2}$$

を満たすようにできる. 次に 2(式 (2) ではない) により, 任意の $\alpha < m(E)$ に対して有界な $F \in \Im_N$ で

$$\bar{F} \subset E, \quad m(F) > \alpha \tag{3}$$

なるものがある. ここで $G_n = (a_{n1}, b_{n1} + \delta_n) \times \cdots \times (a_{nN}, b_{nN} + \delta_n)$(開区間) とおくと

$$\bar{F} \subset E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$$

$\bar{F}$ は有界閉集合で G_n はすべて開集合だから, Borel-Lebesgue の被覆定理により, 適当な n_0 をとれば

$$F \subset \bar{F} \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} G_n \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} I_n$$

だから, m の単調性, 有限劣化法性と (2),(3) により

$$\alpha < m(F) \leqq \sum_{n=1}^{n_0} m(J_n) \leqq \sum_{n=1}^{n_0} \left\{ m(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right\} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) + \varepsilon$$

ここで ε は任意の正数であり, αは $m(E)$ どれだけでも近くとれるから (1) を成り立つ.

4. m が$\Im_N$ の上で完全加法的なことの証明 $E, E_n \in \Im_N(n = 1, 2, \cdots), E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ とすると

$$E_n = I_{n1} + \cdots + E_{nk_n} \quad (I_{nj} \in \Im_N; j = 1, \cdots, k_n)$$

と表されて

$$m(E_n) = \sum_{j=1}^{k_n} m(I_{nj})$$

である. このとき

$$E = \sum_{n=1} \infty \sum_{j=1}^{k_n} I_{nj}$$

だから, 3 により

$$m(E) \leqq \sum_{n=1} \infty \sum_{j=1}^{k_n} m(I_{nj}) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \tag{4}$$

一方, 任意の p に対して $E \subset \sum_{n=1}^{p} E_n$ だから, m の単調性と有限加法性とにより

$$m(E) \geqq \sum_{n=1}^{p} m(E_n)$$

となる. $p \to \infty$ の極限をとれば

$$m(E) \geqq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \tag{5}$$

を得る. (4),(5) から $m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$.

□

定理. (Borel-Lebesgue の被覆定理)
E を R^N の中の有界閉集合をする. R^N の中の開集合の系 $\{G_\lambda\}$ があって

$$E \subset \bigcup_{\lambda} G_\lambda \quad \text{(このことを開集合系 } \{G_\lambda\} \text{ は } E \text{ を掩 (おお) うという.)} \tag{6}$$

となるならば, $\{G_\lambda\}$ の中の有限このものだけで E を掩うことができる. すなわち適当な $G_{\lambda_1}, \cdots, G_{\lambda_n}$ をとれば

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{\lambda_k}$$

となる.

4　外測度

定義. 空間 X のすべての部分集合 A に対して定義された集合函数 $\Gamma(A)$ があって

1. $0 \leqq \Gamma(a) \leqq \infty,\quad \Gamma(\phi) = 0$ (非負性)
2. $A \subset B$ ならば $\Gamma(A) \leqq \Gamma(B)$ (単調性)
3. $\Gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n)$ (劣加法性)

なる三つの条件を満たすとき, Γ をカラテオドリ外測度または単に外測度という.

定理 4.1. $\Im$を X の部分集合の有限加法族とし, m を$\Im$ の上の有限加法的測度とする. このとき

1. 任意の $A \subset X$ に対して高々可算無限個の集合 $E_n \in \Im$ で A を掩い (すなわち $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$; このような掩い方は少なくとも一つはある. 例えば $A \subset X \in \Im$)

$$\Gamma(A) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)\quad (\inf \text{ は上に述べたようなすべての掩い方に対する下限})$$

と定義すると, Γ は外測度である.

2. 特に m が$\Im$ の上で完全加法的ならば $E \in \Im$ に対しては $\Gamma(E) = m(E)$ となる. (一般には $\Gamma(E) \leqq m(E)$ である.)

証明. 1. 外測度の三つの条件を満たせばよいので, 条件の 1 を示す.
$0 \leqq m(E) \leqq \infty$ $(E \in \Im)$ より, $0 \leqq \Gamma \leqq \infty$ となることがわかる. また, $\phi \subset \phi \in \Im$より $\Gamma(\phi) \leqq m(\phi) = 0$ 従って, 1 が示せた.
次に, 条件の 2 を示す.
$A \subset B$ とし B の任意の掩い方 $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ $(E_n \in \Im)$ を考えると, $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ でもあるから,

$$\Gamma(A) \leqq \sum_{m=1}^{\infty} m(E_n)$$

この右辺の B のすべての掩い方に対する下限をとれば $\Gamma(A) \leqq \Gamma(B)$ を得る.
(すべての掩い方の下限をとっているから $\Gamma(B) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ となるから, 成り立っている.) 次に, 条件の 3 を示す.
任意の $\varepsilon > 0$ をとるとき, 各 A_n に対して,

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{nk}\ ,\ \sum_{k=1}^{\infty} m(E_{nk}) \leqq \Gamma(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

なる $E_{nk} \in \Im$ $(k = 1, 2, \cdots)$ がとれる. (上の式を満たすような E_{nk}をとってくる. E_{nk}を満たすような A_nやεをとるのではない.) このとき $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{nk}$(すなわち右辺は $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$の掩い方の一つ) であるから

$$\Gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m(E_{nk}) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\Gamma(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n) + \varepsilon$$

ここで, ε は任意の正数だから, 3 が成り立つ.

2. $E \in \Im$ ならば, $E \subset E$ を一つの掩い方と考えれば

$$\Gamma(E) \leqq m(E) \tag{1}$$

はいつでも成り立つ. 次に $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ $(E_n \in \Im)$ なる任意の掩い方に対して

$$F_1 = E_1 \cap E, \quad F_n = \left(E_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right) \cap E \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

とおくと, $F_1, F_2, \cdots$ はどの二つも互いに素で

$$F_n \subset E_n, \quad F_n \in \Im \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$E = E \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \quad E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \quad E \in \Im$$

だから, m が$\Im$ の上で完全加法的なら

$$m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(F_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

ここで E のすべての掩い方に対する右辺の下限をとれば $m(E) \leqq \Gamma(E)$; これと (1) とあわせて $\Gamma(E) = m(E)$ を得る.

□

R^nにおいて $f_\nu(\lambda) = \lambda$ $(\nu = 1, \cdots, N)$ として

$X = R^N$, $\Im = \Im_N$ とし, m を $f_1(\lambda), \cdots, f_N(\lambda)$ を R^1で単調増加な実数値函数で定数ではないものとし, 有界な区間 $I = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_N, b_N](-\infty < a_\nu < b_\nu < \infty)$ に対して

$$m(I) = \prod_{\nu=1}^{N} \{f_\nu(b_\nu) - f_\nu(a_\nu)\}$$

有界でない区間 I に対しては

$$m(I) = \sup\{m(j); J \text{ は } I \text{ に含まれる任意の有界区間 }\}$$

と定義し, 空集合 ϕ に対しては $m(\phi) = 0$, 区間塊 $E = I_1 + \cdots + I_n$ に対しては

$$m(E) = m(I_1) + \cdots + m(I_n)$$

と定義する. この m は $\Im_N$ の上の有限加法的測度である.
上のことと定理 4.1 との方法で構成した外測度を $\mu^*(A)$ と書き Lebesgue 外測度という.
この場合は定理 3.2 と定理 4.1 の (1) により $I = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_N, b_N]$ に対して

$$\mu^*(I) = \prod_{\nu=1}^{N} (b_\nu - a_\nu)$$

となる.

次に加測性の概念を導入するため

(1) 加測な集合の全体が有限加法族をなし, Γ はその上の有限加法的測度であることは自然な要求である.

(2)　$A = A_1 + A_2 + \cdots$ (可算無限個) で各 A_n が加測ならば A も可測であるようにしたい. (1),(2) から

(2')　$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ (可算無限個) で各 A_n が可測ならば A も可測であることが証明される. すなわち $B_1 = A_1,\ B_n = A_n - \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)$ $(n = 2, 3, \cdots)$ とおくと, $A = B_1 + B_2 + \cdots$ (直和) となるが, (1) によって各 B_n 可測, 従って (2) により A は可測である. また R^N における Lebesgue 外測度のときは少なくとも区間塊は可測であるべきだから, 一般空間においては

(3)　定理 4.1 の 2 を満たす外側度 Γ については $\Im$ に属する集合は可測であることを要請する.

これらの条件が満たされているとすると, 集合 E が可測ならば

(4)　任意の $A \subset X$ に対して $\Gamma(A) = \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap E^c)$

が成り立つことを証明しよう. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, Γ の定義により

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \leqq \Gamma(A) + \varepsilon \qquad \left(\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(E_n),\ \text{下の証明で使ってる}\right)$$

となる $E_n \in \Im$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が存在する.

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

とおくと, 上の (1),(2'),(3) により $H,\ H \cap E,\ H \cap E^c$ はすべて可測であって

$$\begin{aligned}\Gamma(A) + \varepsilon \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(E_n) &\geqq \Gamma(H) = \Gamma(H \cap E) + \Gamma(H \cap E^c) \\ &\geqq \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap E^c) \geqq \Gamma(A)\end{aligned}$$

ここで ε は任意の正数だから (4) が成立する

こうして, (4) が可測集合を特徴づける一つの必要条件であることがわかった. しかし, 外測度の定義のあとに (4) を E が可測であることの定義とするには奇異な感じを起こさせるかもしれない.

加速性の定義を述べる.

定義. 空間 X 外測度 Γ が定義されているとする. 集合 $E \subset X$ が次の条件を満たすとき, E は (Carathéodory の意味で) 可測または $\Gamma-$ 可測であるという.

(1)　任意の $A \subset X$ に対して $\Gamma(A) = \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap E^c)$

この条件は次の条件と同等である

(1')　任意の $A_1 \subset E$ と任意の $A_2 \subset E^c$ に対して $\Gamma(A_1 + A_2) = \Gamma(A_1) + \Gamma(A_2)$

なぜならば, (1) が成り立つとすると, 任意の $A_1 \subset E, A_2 \subset E^c$ に対して $A = A_1 + A_2$ に (1) を適用すれば (1') が得られる. また (1') が成り立つならば任意の $A \subset X$ に対して $A_1 = A \cap E$ と $A_2 = A \cap E^c$ とに (1') を適用すれば (1) が得られる.

注意. 外測度の定義 3 において $A_n = \phi (n \geqq 3)$ とおいて定義 1 を使えば $\Gamma(A_1 \cup A_2) \leqq \Gamma(A_1) + \Gamma(A_2)$. だから, 上の (1),(1') において等号のかわりに $\leqq$ としたものは, E が可測であってもなくても成り立つ. だから集合 E が $\Gamma-$ 可測であることを証明するには反対向きの不等式 $\geqq$ だけを証明すればよい. このことは今後よく使う.

$\Gamma-$ 可測集合の全体を $\mathfrak{M}_\Gamma$ と書く. 上の定義から

(2) $E \in \mathfrak{M}$ ならば $E^c \in \mathfrak{M}((1)$ により明らか.)

(3) $\Gamma(E) = 0$ ならば $E \in \mathfrak{M}_\Gamma,$ 従って特に$\phi \in \mathfrak{M}_\Gamma$

なぜならば, 任意の $A \subset X$ に対して定義の 2 により $\Gamma(A \cap E) \leqq \Gamma(E) = 0$ だから, $\Gamma(A) \geqq \Gamma(A \cap E^c) = \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap E^c)$. だから上の注意により $E \in \mathfrak{M}_\Gamma$.
$\Gamma(E) = 0$ なる集合を (Γ に関する) 零集合という. 空集合と混同してはならない. 空集合は明らかに零集合であるが, 逆は成立しない.

定理 4.2. 定理 4.1 の方法で構成された外測度 Γ については $\Im \subset \mathfrak{M}_\Gamma$ が成立する.

証明. $E \subset \Im$ とする. 任意の $A \subset X$ に対して $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,\ E_n \in \Im,$ なる掩い方を考えると,

$$A \cap E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap E), \quad A \cap E^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap E^c)$$

だから, $E_n = E_n \cap E + E_n \cap E^c$ なることと, m の有限加法性とにより

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n \cap E) + \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n \cap E^c) \\ &\geqq \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap E^c) \end{aligned}$$

A のすべての掩い方に対する左辺の下限をとれば $\Gamma(A) \geqq \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap E^c)$ となるから $E \in \mathfrak{M}_\Gamma$である. だから$\Im \subset \mathfrak{M}_\Gamma$ □

次に Γ を空間 X における任意の外測度として, $\mathfrak{M}_\Gamma$ とその上で考えた Γ の重要な性質を定理として述べよう.

定理 4.3. $E_k \in \mathfrak{M}_\Gamma\ (k = 1, 2, \cdots),\ E_j \cap E_k = \phi\ (j \neq k),\ S = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$ ならば

$$S \in \mathfrak{M}_\Gamma, \quad \Gamma(S) = \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma(E_k)$$

証明. 任意の $A \subset X$ と任意の n に対して

(4.4) $\Gamma(A) \geqq \sum_{k=1}^{n} \Gamma(A \cap E_k) + \Gamma(A \cap S^c)$

が証明できたとすると, $n \to \infty$ としてから $\sum_{k=1}^{\infty} (A \cap E_k) = A \cap S$ となることと Γ の劣加法性とを使って

(4.5) $\Gamma(A) \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma(A \cap E_k) + \Gamma(A \cap S^c) \geqq \Gamma(A \cap S) + \Gamma(A \cap S^c)$

だから $S \in \mathfrak{M}_\Gamma$ である. また (4.5) において $A = S$ とおくと

$$\Gamma(S) \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma(E_k) \geqq \Gamma(S)$$

すなわち $\Gamma(S) = \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma(E_k)$ を得る.
さて (4.4) は次のように数学的帰納法で証明される. まず $E_1 \in \mathfrak{M}_\Gamma$ なることと Γ の単調性により

$$\Gamma(A) = \Gamma(A \cap E_1) + \Gamma(A \cap {E_1}^c) \geqq \Gamma(A \cap E_1) + \Gamma(A \cap S^c)$$

だから, (4.4) は $n = 1$ のときは成立する. 次に (4.4) が n まで成り立つとすると, A を $A \cap {E_{n+1}}^c$ でおきかえて

$$
\begin{aligned}
(4.6)\quad \Gamma(A \cap {E_{n+1}}^c) &\geqq \sum_{k=1}^{n} \Gamma(A \cap {E_{n+1}}^c \cap E_k) + \Gamma(A \cap {E_{n+1}}^c \cap S^c) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Gamma(A \cap E_k) + \Gamma(A \cap S^c)
\end{aligned}
$$

を得る. (仮定より $S^c \subset {E_{n+1}}^c$, また $k \leqq n$ ならば $E_k \subset {E_{n+1}}^c$ なることを使った.) ところが $E_{n+1} \in \mathfrak{M}_\Gamma$ だから,

$$
\begin{aligned}
\Gamma(A) &= \Gamma(A \cap E_{n+1}) + \Gamma(A \cap {E_{n+1}}^c) \\
&\geqq \Gamma(A \cap E_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} (A \cap E_k) + \Gamma(A \cap S^c) \ \text{((4.6) により)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \Gamma(A \cap E_k) + \Gamma(A \cap S^c)
\end{aligned}
$$

すなわち (4.4) が n+1 に対して成り立つ. □

定理 4.4. $E, F \in \mathfrak{M}_\Gamma$ ならば $E - F \in \mathfrak{M}_\Gamma,\ E \cap E \in \mathfrak{M}_\Gamma$

証明. $E \cap F \in \mathfrak{M}_\Gamma$ を証明すれば, (2) により $E - F = E \cap F^c \in \mathfrak{M}_\Gamma$ となる.
だから $E \cap F$ が条件 (1') を満たすこと, すなわち任意の $A \subset E \cap F,\ B \subset (E \cap F)^c = E^c \cup F^c$ に対して $\Gamma(A) + \Gamma(B) \leqq \Gamma(A + B)$ となることを示せばよい. 今

$$B_1 = B \cap F, \quad B_2 = B \cap F^c$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
&(4.7)\quad A \subset E, \quad B_1 \subset (E^c \cup F^c) \cap F \subset E^c, \quad E \in \mathfrak{M}_\Gamma \\
&(4.8)\quad A + B_1 \subset F, \quad B_2 \subset \mathfrak{M}_\Gamma
\end{aligned}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
\Gamma(A) + \Gamma(B) &\geqq \Gamma(A) + \Gamma(B_1) + \Gamma(B_2) && (B = B_1 + B_2 \text{により}) \\
&= \Gamma(A + B_1) + \Gamma(B_2) && \text{((4.7) により)} \\
&= \Gamma(A + B_1 + B_2) && \text{((4.8) により)} \\
&= \Gamma(A + B)
\end{aligned}
$$

□

系. $E_k \in \mathfrak{M}_\Gamma$ $(k=1,\cdots,n)$ ならば $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathfrak{M}_\Gamma$, $\bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathfrak{M}_\Gamma$

証明. 仮定から, 上の定理と n に関する数学的帰納法で $\bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathfrak{M}_\Gamma$ を得る. 従ってまた (2) により, de Morgan の公式を使って

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k = \left(\bigcap_{k=1}^{n} {E_k}^c\right)^c \in \mathfrak{M}_\Gamma$$

□

定理 4.5. $E_n \in \mathfrak{M}_\Gamma$ $(n=1,2,\cdots)$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{M}_\Gamma$

証明.

$$F_1 = E_1,\quad F_n = E_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k \quad (n \geqq 2)$$

とおくと, 定理 4.4 とその系とにより $F_n \in \mathfrak{M}_\Gamma$ $(n=1,2,\cdots)$. そして $j \neq k$ ならば $F_j \cap F_k = \phi$ であり, $\sum_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ だから, 定理 4.3 により $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{M}_\Gamma$ □

一般にある集合族が上の二つの定理に述べたような性質を持つとき (完全) 加法族といい, 測度論の基礎になる.

5 測度

定義. 空間 X の部分集合の族 $\mathfrak{B}$ があって

(5.1) $\phi \in \mathfrak{B}$

(5.2) $E \in \mathfrak{B}$ ならば $E^c \in \mathfrak{B}$

(5.3) $E_n \in \mathfrak{B}$ $(n=1,2,\cdots)$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{B}$

なる三つの条件を満たすとき, $\mathfrak{B}$ を完全加法族, 可算加法族, σ-加法族, または単に加法族という. (以降では σ-加法族と呼ぶ.)

σ-加法族は明らかに有限加法族であるから, 以下の条件を得ることができる.

(5.4) $X \in \mathfrak{B}$

(5.5) $\mathfrak{B}$ に属する集合の和, 差, 交わりを作る操作を高々可算無限回行って得られる集合 $\mathfrak{B}$ に属する.

ということは容易にわかる.

定義. 空間 X とその部分集合の σ-加法族 $\mathfrak{B}$ があって, $\mathfrak{B}$-集合函数 $\mu(A)$ が

(5.6) $0 \leqq \mu(A) \leqq \infty,\quad \mu(\phi) = 0$ (非負性),

(5.7) $$\begin{cases} A_n \in \mathfrak{B}\ (n=1,2,\cdots),\ A_j \cap A_k = \phi\ (j \neq k) \text{ ならば} \\ \mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{(完全加法性, 可算加法性)} \end{cases}$$

を満たすとき, μを $\mathfrak{B}$ で定義された測度という.

6　今後の課題 (反省)

今回は上のようなことを書いたが内容を全く理解できていないのでまた一から勉強をし直そうと思っている参考文献を一度しっかりと読み終えるモチベーションをしっかり持って計画的にできたらいいと思います. 勉強方法の改善をしなければいけないと思いました.

参考文献

[1] 伊藤清三, ルベーグ積分入門, 堂華房, 2017