

選択公理を認めない世界線

BV18077 森田 泰成

2020年6月12日

目次

1	はじめに	2
2	添字付き集合族	2
3	集合族の直積と選択公理	2
4	選択公理に対する批判	4
5	選択公理を認めない世界線	4
6	おわりに	4

1 はじめに

集合論について学習しているとき、「選択公理を認めたまま話を進める」という記述が多くみられた。そこで、選択公理を認めない場合はどのような議論ができるのか気になったため調べることにした。

2 添字付き集合族

集合を元とする集合 (集合族) において、有限個の集合からなる集合族の場合、その集合がどのような集合から成り立っているのかを示すことができる。しかし、無限個の集合からなる集合族の場合、そのようにはいかない。

定義 2.1 集合族 \mathcal{F} が集合 I からの全射 $g: I \rightarrow \mathcal{F}$ とともに与えられているとき、 \mathcal{F} を添字付き集合族とよぶ。通常 $i \in I$ の像 $g(i)$ を A_i とかき、集合族 \mathcal{F} を

$$\{A_i | i \in I\} \text{ または } \{A_i\}_{i \in I}$$

と表す。このとき、 I を \mathcal{F} の添字集合とよぶ。

記号として集合 X の冪集合を $\mathfrak{P}(X)$ と表す。

定義 2.2 集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ の要素 A_i がすべて集合 X の部分集合であるとき、すなわち $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathfrak{P}(X)$ のとき、集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ を部分集合族とよぶ。

集合 X の冪集合 $\mathfrak{P}(X)$ は $\mathfrak{P}(X)$ 自身を添字集合とする添字付き集合族と考えることができる。 $A \in \mathfrak{P}(X)$ に対して $X_A = A$ とおくと、 $\mathfrak{P}(X) = \{X_A\}_{A \in \mathfrak{P}(X)}$ である。

例 2.1 1. $\mathbb{R}_+ \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$, $a \in \mathbb{R}$ とする。そのとき a を中心とする幅 $2\varepsilon > 0$ の开区間の集まり $\{(a - \varepsilon, a + \varepsilon)\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$ は \mathbb{R}_+ を添字集合する集合族であり、実数全体の集合 \mathbb{R} の部分集合族である。
2. $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$L_{(a,b)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = ax + b\}$$

とおくとき、直線の集まり $\{L_{(a,b)}\}_{(a,b) \in \mathbb{R}^2}$ は \mathbb{R}^2 を添字集合とする集合族であり、平面 \mathbb{R}^2 の部分集合族である。

3 集合族の直積と選択公理

有限個の集合 A_1, A_2, \dots, A_n の直積 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ は

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\} \quad (1)$$

である。この直積集合の定義を添字集合が無限集合の直積集合の場合も含めて、添字付き集合族に対して拡張したい。有限個の集合 A_1, A_2, \dots, A_n の直積 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ の元は (a_1, a_2, \dots, a_n) , $a_i \in A_i$ の形をしている。添字付き集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ の添字集合 I が \mathbb{R} などの無限集合の場合、各集合 A_i から元を1つずつ選んで $(a_1, a_2, \dots, a_j, \dots)$ のように並べることができない。そこで次のように定義する。

定義 3.1 集合 I を添字集合とする集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ に対して, I から和集合 $\bigcup_{i \in I} A_i$ への写像 f で条件

$$\text{「すべての } i \in I \text{ に対して } f(i) \in A_i \text{」}$$

を満たすもの全体の集合を集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ の直積, または直積集合とよび, $\prod_{i \in I} A_i$ と表す. すなわち

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid \text{すべての } i \in I \text{ に対して } f(i) \in A_i\} \quad (2)$$

有限個の集合 A_1, A_2, \dots, A_n の直積 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ の元 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ に対し, 対応 $i \mapsto a_i$ で定義される添字の集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ から和集合 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ への写像を f_a で表す. すなわち

$$f_a : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad f_a(i) = a_i, \quad \Phi(a) = f_a$$

は全単射である. 直積集合 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ の元 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ は写像 f_a の値を並べたもの $(f_a(1), f_a(2), \dots, f_a(n))$ である. 写像は定義域の元に対する値が決まれば写像として決定し, 逆に写像が与えられれば定義域の元に対する値は決定する. このことから全単射 $\Phi : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow \prod_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} A_i$ により $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ と $\prod_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} A_i$ を同一視することができる. ゆえに集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ の直積 $\prod_{i \in I} A_i$ は有限個の集合の直積の一般化になっている. このことから, (2) の元 f は写像として扱うが, f の像を $(f(1), f(2), \dots, f(n))$ と並べることで (1) の元として扱うことができる.

命題 3.1 集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ が空集合を含んでいれば, 直積集合 $\prod_{i \in I} A_i$ は空集合である.

証明 3.1 集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ が空集合を含んでいるとする. すると, ある添字 $i_0 \in I$ に対して $A_{i_0} = \phi$ となる. 直積集合 $\prod_{i \in I} A_i$ の元 $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ は条件「すべての $i \in I$ に対して $f(i) \in A_i$ 」を満たす必要がある. しかし, $A_{i_0} = \phi$ なので, 添字 $i_0 \in I$ に対して, $f(i_0) \in A_{i_0} = \phi$ となる写像 $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ は存在しない. したがって $\prod_{i \in I} A_i$ は空集合である. //

命題 3.1 の逆, すなわち集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ が空集合を含んでいないならば, 直積集合 $\prod_{i \in I} A_i$ は空集合でないことを選択公理という.

定義 3.2 集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ が空集合を含んでいないとき, 直積集合 $\prod_{i \in I} A_i$ の元を集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ の選択関数とよぶ.

集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ が空集合を含んでいないとし, f の集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ の選択関数とする. すると, f は添字の集合 I から和集合 $\bigcup_{i \in I} A_i$ への写像 f で

$$\text{すべての } i \in I \text{ に対して } f(i) \in A_i$$

となっている. このことから上記の選択公理を言い換えると

— 選択公理 —

集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ が空集合を含んでいないならば, 集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ に属する各集合 A_i から 1 つずつ要素を選ぶことができる.

4 選択公理に対する批判

集合族が有限集合の場合、集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ から 1 つずつ要素が取り出すことが有限の時間で具体的に明示することができる。しかし、無限集合となるとそのような具体的な例が有限の時間では示せないため、選択公理が提唱されたころは批判が起こった。

5 選択公理を認めない世界線

選択公理を認めない場合、今までそれを真として証明を進めてきたため、選択公理やそれと同値な命題を証明に用いることができなくなる。以下では例として定理をあげる。

定理 5.1 無限集合^{*1} X は可算無限部分集合^{*2}を含む。(可算集合とは自然数全体の集合 \mathbb{N} と同じ濃度を持つ集合を指す。)

証明 5.1 $a_0 \in X$ をとる。 X は無限集合だから、 $X \setminus \{a_0\}$ は空でない。よって $a_1 \in X \setminus \{a_0\}$ がとれる。 $X \setminus \{a_0, a_1\}$ も空ではないから $a_2 \in X \setminus \{a_0, a_1\}$ がとれる。これを無限に繰り返す、可算無限集合 $\{a_0, a_1, a_2, \dots\} \subset X$ が得られる。

上の証明にある「無限に繰り返す」という行為において、選択公理が用いられている。また、可算集合のため添字集合は \mathbb{N} である。選択公理を用いた証明方法は認められないが、これを用いずに証明すればよい話である。

6 おわりに

選択公理とその他周辺の集合論について学習した。もっと深くまで調べようとしたが ZFC 公理系など、数学基礎論に踏み入るため、入口までにした。上にも書いたが、選択公理を用いた証明と、用いずに証明するもの両方発見されている定理も多くあるようなので、結果としてはそこまで深刻な問題が起こることはないのではと思う(実際にはそんなことないだろうが)。数学における基本的な論理体系を学ぶことができたので、今後の勉強に役立てていきたい。

参考文献

- [1] 福田拓生著, 集合とへの入門 [無限をかいま見る], 培風館, 2012 年
- [2] 志賀浩二著, 集合への 30 講, 朝倉書店, 1988 年
- [3] 内田伏一著, 集合と位相, 裳華房, 1986 年

*1 集合の元の個数が有限でない集合

*2 可算個の元を持つ部分集合