論理

芝浦工業大学　数理科学研究会
BV18015 大岡舜明

2020 年 6 月 12 日

目次

1　研究背景

私たちが知っている数学に関係するクイズの一つとして, 正直者とウソつきの問題がある. これは何人かの人物が言っているそれぞれの主張を聞き取って, 誰が本当のことを言っているかを推理する論理クイズである.
私はこの類のクイズに直面したときの解決法として総当たり的手法, つまりある人を正直者と仮定するとこの人はウソで矛盾しているから $\cdots$ といった, 地道なやり方で解決していた. 私はこのクイズの解き方についてこの方法しか知らないし, 他の人の多くもそうだろう. しかしこのクイズのカテゴリーは数学であって, 数字や数学的記号を使わずして解けたと言っていいのだろうか？他の数学関係のクイズが計算を繰り返して鮮やかに答えを導き出すように, このクイズでもスマートな切り口で答えを求めたいと考えた. そこで今回はこのクイズについて, 命題論理の視点で解くやり方を示す.

2　準備

舞台の設定として, 騎士と悪漢の島を用意する. ここでは, 騎士は常に本当のことを言い, 悪漢は常にウソをつく. そして, その住民は騎士か悪漢のどちらかである.

また, 次のような形式の質問がこの先よく登場する.「$\cdots$のとき, そしてその時に限り, $\cdots$」という言い回しである 任意の二つの命題が与えられたときに,「一方であるとき, そしてその時に限り, もう一方」というのは, どちらか一方が真ならば, 残りのもう一方もまた真となるということである. あるいは, 同じことだが, 二つの命題がともに真となるか, ともに偽となるかのどちらかということである. 例えば「この島に埋蔵金があるとき, そしてその時に限り, あなたは騎士か」という質問があったとする. このとき, この質問は次の二つの選択肢のうち一方が成り立つかどうかを尋ねている.
(1) 住民は騎士で, この島に埋蔵金がある.
(2) 住民は悪漢で, この島に埋蔵金はない.
このように, 一つの質問で二つの命題を扱う場合が登場するので注意する.

3　正直者とウソつきの理論

A を島の住民とし, k を「A は騎士である」という命題とする. このとき,「A は悪漢である」という命題は単に nk(「A は騎士ではない」) と書くことができる. ここで A が命題 P を主張したとする. A が騎士かどうかはわからず, P が真かどうかもわからないが, A が騎士ならば P は真で, 逆に P が真ならば A は騎士でだとわかる. すなわち, P が真であるとき, そしてそのときに限り,A は騎士である. これを論理式で表すと $k \equiv P$ となる.
つまり, A が命題 P を主張するとき, 実質的にこの状況は

$$k \equiv P$$

となる.

通常, 複数の住民を同時に扱うので, ここでは, $A_1, A_2, A_3, \cdots$ はそれぞれの住民を表し

, $k_1, k_2, k_3, \cdots$ はそれぞれ「A_1は騎士である」,「A_2は騎士である」,「A_3は騎士である」, $\cdots$ という命題を表す. ここで A_1が命題 P を主張するならば, $k \equiv P$ が成り立つ. A_2が命題 P を主張するならば, $k_2 \equiv P$ が成り立つ. こうして騎士と悪漢の問題は, 次の例で示すように命題論理の問題に翻訳できる.

例としてある問題を考えてみる. この問題では, 住民 A_1および A_2がいて, A_1は「A_1と A_2はどちらも悪漢だ」と主張した. 命題「A_1と A_2はどちらも悪漢だ」は $nk_1 \wedge nk_2$と表記できる. A_1がこの命題を主張したのだから, 実質的にこの状況は $k_1 \equiv (nk_1 \wedge nk_2)$ となる. ここから k_1および k_2の真偽値を求めなければならない. この問題は, $k_1 \equiv (nk_1 \wedge nk_2)$ の真偽表を使って解くことができる.

k_1	k_2	nk_1	nk_2	$nk_1 \wedge nk_2$	$k_1 \equiv (nk_1 \wedge nk_2)$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	F

この真偽表から, $k_1 \equiv (nk_1 \wedge nk_2)$ が真となるのは, k_1が偽で k_2が真の場合だけであることがわかる. いいかえると A_1が悪漢で A_2が騎士となる.

4　ネルソン・グッドマンの原理

ここで, 騎士と悪漢の島でのネルソン・グッドマンの原理を紹介する. 与えられた命題 P が真かどうかを確かめるためには,「P であるとき, そしてそのときに限り, あなたは騎士か」と住民に尋ねればよい. これは $k \equiv P$ が成り立つかどうかを尋ねていることになる. 住民が「はい」と答えれば P は真で,「いいえ」と答えれば P は真でない, つまり P が成り立つとき, そしてその時に限り, 住民は「はい」と答えることを実質的に証明した. 住民が「はい」と答えることは $k \equiv P$ が成り立つと主張することと同値なので, 実質的にこの状況は $k \equiv (k \equiv P)$ となる. しかしこれは, $(k \equiv k) \equiv P$ に同値で, それはまた P に同値となることがわかる. そして, ネルソン・グッドマンの恒等式 $(k \equiv (k \equiv P)) \equiv P$ によって, (住民が「はい」と答えることで $k \equiv P$ と主張したならば)P は真でなければならない. 住民が「いいえ」と答えたならば, $nk \equiv P$ と主張したことになり, 実質的にこの状況は $k \equiv n(k \equiv P)$ となるが, これは真偽表から確かめられるように nP に同値になる.

ここでひとつ, ネルソン・グッドマンの原理を使って問題を解いてみよう.
○騎士と悪漢の規則を守る限り, 住民が「はい」とも「いいえ」とも答えることができない質問をすることができるだろうか?
この問題は次のように考えられる. k を「この住民は騎士である」という命題とし, m を「この質問に「いいえ」と答える」という命題にする. 任意の命題 P について $k \equiv P$ が成り立つかを尋ねると, P が成り立つとき, そしてその時に限り, その住民は「はい」と答える. そこで P として m をとり, $k \equiv m$ が成り立つか尋ねると, m が成り立つとき, そしてその時に限り, その住民は「はい」と答

える. すなわち, 住民が「いいえ」と答えるとき, そしてその時に限り, その住民は「はい」と答える. これは住民が「はい」および「いいえ」の両方を答えるか, またはどちらも答えないかを意味する. 住民が両方を答えることはないので,「はい」とも「いいえ」とも答えない.
つまり「この質問にあなたが「いいえ」と答えるとき, そしてその時に限り, あなたは騎士か」と尋ねればよい.

5 今後の課題

最初, 論理の問題を数学的に解く手法に惹かれて研究を始めたものの, 本を読み進めるにつれてモチベーションが上がらなくなってきた. そもそも論理学の本がほとんどない中で, この本は数学論理学を学ぶ教材として素晴らしいのは間違いなく, 授業で論理学を学ぶとしたならばこの本を教科書に学習したいほどよく書かれていた. しかし, 一人で計算をすることなくただ本を読んで, これは本当に数学の研究なのかと思うことも多くなった. 今後の課題としてモチベーションを保ちながら, ある程度の成果を記述できるまで本腰を入れて課題に取り組むようにする.

参考文献

[1] スマリヤン 記号論理学 一般化と記号化 高橋昌一郎：監訳 川辺治之：訳 丸善出版 平成 25 年.