連分数を用いて黄金数を求める

芝浦工業大学　数理科学研究会
BV19035　園田　夏紀

2020 年 6 月 12 日

目 次

1　研究背景

ある日, 図書館で本を探していたところ, 連分数について知った. 連分数を用いることで様々な問題を解くことができるということに興味を持ったから今回, その問題の一つである黄金数について調べることにした.

2　連分数

2.1　目的

この章の目的は実数 α の, もっともよい有理数近似を求めることである.

2.2　定義

有理数 $\dfrac{p}{q}$, $(p,q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N}\backslash\{0\})$ が実数 α の最良近似分数, あるいは近似分数であるとは, $q > 1$ であって, しかも $q' < q$ を満たす任意の組 $(p', q') \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N}\backslash\{0\})$ に対し, $\|q\alpha - p\| < \|q'\alpha - p'\|$ が成立していることと定義する. この定義から分かるように, α の近似分数を並べると α に収束する既約な分数列 $\dfrac{p_n}{q_n}$ を作ることができる.

2.3　近似分数の計算

α の部分商の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を次のように定める.

$$
\begin{aligned}
\alpha = \alpha_0 &= a_0 + \frac{1}{\alpha_1} \\
\alpha_1 &= a_1 + \frac{1}{\alpha_2} \\
&\vdots \\
\alpha_n &= a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}
\end{aligned}
$$

ただし, $a_0 \in \mathbb{Z}$ $n \leq 1$ ならば $a_n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\alpha_n > 1$ ととる.
この数列 a_n は $[\alpha_n] = \alpha_n$ となるところがあれば, n までで止まってしまう.

近似分数は次の漸化式で求めていくことができる. $0 \leq n$ では,

$$
\begin{cases}
p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\
q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}
\end{cases}
\tag{1}
$$

ただし, $(p_{-2}, q_{-2}) = (0,1)$, $(p_{-2}, q{-}2) = (1,0)$.

この定義式から次の式が得られる

$$
\begin{aligned}
p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} &= (-1)^{n+1} \\
\alpha &= \frac{p_n \alpha_{n+1} + p_{n-1}}{q_n \alpha_{n+1} + q_{n-1}} \\
\frac{p_n}{q_n} &= [a_0, \cdots, a_n]
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
[a_0, \cdots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}
$$

$$
\|q_n\alpha - p_n\| = \frac{1}{q_n \alpha_{n+1} + q_{n-1}} \tag{2}
$$

2.4 定理

定理 2.1. 数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が有限で切れることと, α が有理数であることとは同値であり, また数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ががあるところから先で周期的になることと, α が 2 次の代数的数であることとは同値である.

定理 2.2. $\alpha = a + b\sqrt{d}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $d \in \mathbb{Q}\backslash 0$ を 2 次の代数的数とし, $\sigma_{(\alpha)} = a - b\sqrt{d}$ をその共役な数とする. 数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が a_0 からただちに循環を始めるためには, $\alpha > 1$ かつ $-1 < \sigma(\alpha) < 0$ となること, つまり α が ” 簡約されている ” ことが必要かつ十分である.

定理 2.3. Lagrange の判定法 (Lagrange's criterion). $(p, q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\backslash\{0\}$ と α 関係式 $\|\alpha - \frac{p}{q}\| \leq \frac{1}{2q^2}$ を満たすなら, $\frac{p}{q}$ は α の 1 つの近似分数である.

3 黄金数 (Golden number)

$a_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ とし, $\frac{P_b}{Q_n}$ をその第 n 近似分数, m は固定された 1 以上の整数とする. さらに

$$C_m = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{P_{2m-1}}{Q_{2m-1}}$$

とおく. 今回の目的は, α を与えられた無理数とするとき, 不等式

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{C_m q^2} \tag{3}$$

を満たす解 $\frac{p}{q}$ の個数を調べることである (ただし, p, q は互いに素な整数で, $q > 0$ とする). 便宜上 3 を満たす分数 $\frac{p}{q}$ のことを 3 の解と呼ぶことにする.

定理 3.1. α の連分数展開を $[a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots,]$ とし, その第 n 近似分数を $\frac{p_n}{q_n}$ で表し, λ_n を,

$$|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| = \frac{1}{\lambda_n q_n^2}$$

によって定める. 2 から

$$|\frac{p_n}{q_n} - \alpha| = \frac{1}{q_n(q_n\alpha_{n+1} + q_{n-1})}$$

である. これにより

$$\lambda_n = \alpha_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}$$

が分かる. よって,

$$\lambda_n = [a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots] + [0, a_n, a_{n-1,\cdots,a_1}]$$

である.

定理 3.2. ある数の奇数番目の近似分数の全体は, その数に収束する単調減少数列になる. したがって $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ の展開が $[0, 1, 1, \cdots]$ であることを用いると

$$\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} < C_m < \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{P_1}{Q_1} = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

が得られる. そして $3\sqrt{5} < 7$ より $\frac{\sqrt{5}+3}{2} < \frac{8}{3}$ である.

定理 3.3. 3 の任意の解は α の近似分数である. また, 不等式 3 は不等式

$$C_m \le \lambda_n \tag{4}$$

と同値である.

証明. $C_m > 2$ なので Laggrange の判定法により, 3 のすべての解は α の近似分数になっていることが分かる. また, $\frac{p_n}{q_n}$ は $C_m \le \lambda_n$ のとき, しかもそのときに限り 3 の解である.

定理 3.4. $\alpha = \alpha_0$ とするこのとき 4 はちょうど m 個の解をもつ.

証明. $\alpha = \alpha_0$ のとき, はちょうど m 個の解をもつ.

$$\lambda_n = [1, 1, \cdots] + [0, \underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{n}]$$

を計算する. $\lambda_n = \frac{1}{\alpha} + \frac{P_n}{Q_n}$ とかけば 4 は

$$\frac{P_{2m-1}}{Q_{2m-1}} \le \frac{P_n}{Q_n}$$

と書け, これはさらに $n \in \{1, 3, \cdots 2k-1, \cdots\}$ と同値である. したがってこの場合, 不等式 3 はちょうど m 個の解をもち, そして不等式

$$\|\alpha - \frac{p}{q}\| \le \frac{1}{Cq^2}$$

$$C > C_m$$

は高々 m 個の解しかもたない.

以下では $\alpha \ne \alpha_0$ とする.

定理 3.5. $a_n \ge 3$ が無限個の n に対して成立するなら, 不等式 4 は無限個の解をもつ.

証明. 定理 3.1 の結果から $a_{n+1} \ge 3$ なら $\lambda_n > 3$ になることがわかる. そこで無限個の n について $a_n \ge 3$ が成り立つなら, 無限個の n について $\lambda_n \ge 3 \ge C_m$ が成り立つ. したがって $C \le 3$ なら問題の不等式 $\alpha - \frac{1}{Cq^2}$ は無限の解をもつことが分かる.

定理 3.6. ある番号から先ではつねに $a_n \le 2$ が成り立ち, 不等式 4 が無限個の n に対して成り立つならば 3.5 と同じ結果が得られる.

証明. 3.1 の結果から, $n \ge 1$ なら,

$$\lambda_n = a_{n+1} + \frac{1}{\alpha_{n+2}} + \frac{1}{[a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1]} > a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}+1}\frac{1}{a_n+1}$$

である. よって $a_n \le 2$, $a_{n+1} = 2$, $a_{n+2} \le 2$ がすべて満たされているなら,

$$\lambda_n > 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

ならつねに無限個の解をもつことがわかる.

定理 3.7. ある番号から先でつねに $a_n = 1$ とし, $a_n > 1$ を満たす番号 n の最大値を r とする. このとき, $\frac{p_{r-1}}{q_{r-1}}, \frac{p_{r+1}}{q_{r+1}}, \frac{p_{r+3}}{q_{r+3}}, \cdots, \frac{p_{r+2m-3}}{q_{r+2m-3}}$ は, 不等式 4 の m 個の解である.

証明. この場合 $\lambda_{r-1} > [a_r, 1, 1, 1 \cdots]$ なので,

$$\lambda_{r-1} > a_r + \frac{1}{[1, 1, \cdots]} = a_r + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \geq \frac{\sqrt{5}+3}{2} \geq C_m$$

が成立する. したがって $\frac{p_{r-1}}{q_{r-1}}$ はたしかに 3 の解である. また $n \geq r$ のとき, $\frac{p_n}{q_n}$ が 3 の解になる必要十分条件は,

$$\lambda_n = [1, 1, \cdots] + [0, \underbrace{1, \cdots, 1}_{n-r}, a_r, \cdots, a_1] \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2} + [0, \underbrace{1, \cdots, 1}_{2m-1}]$$

となることであり, これは,

$$[\underbrace{1, \cdots, 1}_{n-r}, a_r, \cdots, a_1] \leq [\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{2m-1}]$$

と同値である. $n-r$ が奇数, しかも $2m-3 \geq n-r$ なら上の不等式はさらに,

$$[a_r, \cdots, a_1] \geq [\underbrace{1, \cdots, 1}_{2m-n+r-1}]$$

と等しい. ところが $a_r \geq 2$ より,

$$[a_r, \cdots, a_1] \geq, a_r \geq 2 > [1, \cdots, 1]$$

となり, すぐ上の条件は満たされている. したがって

$$\frac{p_{r-1+2j}}{q_{r-1+2j}}$$

ただし, $(j = 0, 1, \cdots, m-1)$ はすべて不等式 3 の解である.

4 結論

定理 3.4, 定理 3.5, 定理 3.6, 定理 3.7 の結果から α がどんな無理数であっても, 不等式 3 は少なくとも m 個の解をもつと結論できる.

5 今後の課題

今回, 連分数を用いる黄金数の求め方について調べたが, この証明をみて, 自分でもわからないところがあったのでそれをなくしていきたい.

参考文献

[1] D.P パラン, 数論問題ゼミ, シュプリンガーフェアラーク東京株式会社, 昭和 62 年.