

水鉄砲の流速

芝浦工業大学 数理科学研究会

BV19070 小宅 宇海

2020年6月12日

目次

- 1 研究背景
- 2 ベルヌーイの定理
 - 3.1 押し出す速度が一定の場合
 - 3.2 押し出す速度が一定でない場合
- 3 竹水鉄砲の場合
- 4 一般的な水鉄砲の場合
- 5 流速の測定方法
- 6 今後の課題

1 研究背景

小さいころプールや川で友人たちと共に水鉄砲で遊んだことをふと思い出し、当時もっと速く撃つ方法はないのかと考えていたことを思い出した。そこで今なら水鉄砲の仕組みや原理を解明しどうすれば速く撃てるのかを分析できるのではないかと思い研究を始めた。

2 ベルヌーイの定理

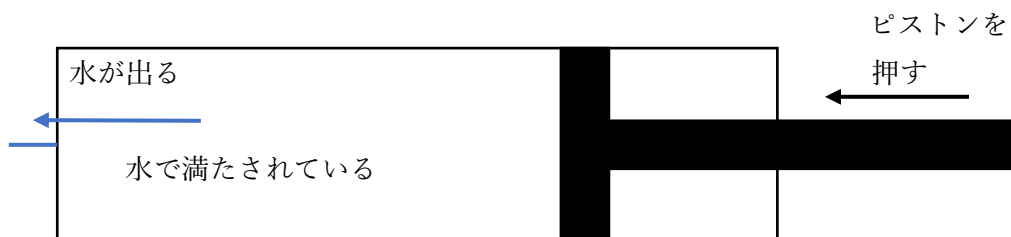
ベルヌーイの定理とは流体における力学的エネルギーの合計が一定であることを表している。そのため、流体に粘度がある場合は考えることが出来ないが、今回考える流体は水であり、水の粘度は20[°C]でおよそ 1.0×10^{-3} [Pa·s]、動粘度は 1.0×10^{-6} [Pa·s]であり、十分小さいとみなせるので今回は粘度、動粘度は考慮しない。ベルヌーイの定理の定理とは以下の式である。

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{const.}$$

ここで、 p は圧力、 ρ は密度、 v は流速、 g は重力加速度、 h は基準面からの高さを表す。

3 竹水鉄砲の場合

ここで最も単純な水鉄砲である竹水鉄砲の場合を考える。竹水鉄砲は以下のような円柱状の構造をしている。



ここで、水を押し出すピストンと筒の間隙はないものとする。その時以下の二つのパターンが考えられる。

3.1 押し出す速度が一定の場合

この時、ピストンを押し出す速度を v_p 、ピストンの半径を R 、流速を v_0 、水が出る場所の半径を r とする。この時のピストンによって押し出される体積流量を Q_p とすると以下のようにあらわすことが出来る。

$$Q_p = v_p t R^2 \pi$$

ここで t は時間[s]を表す。また、竹水鉄砲から出る体積流量を Q_0 とすると以下のようにあらわすことが出来る。

$$Q_o = v_o t r^2 \pi$$

ここで Q_p と Q_o は等しいので、以下の式が成り立つ。

$$v_p t R^2 \pi = v_o t r^2 \pi$$

したがって、

$$v_o = \frac{R^2}{r^2} v_p$$

という式が導かれる。この式からピストンを押し出す速度が一定の時、飛び出る水の流速はピストンを押し出す速度とピストンの半径(面積)比例し、水が出るところの半径(面積)に反比例することがわかる。

3.2 押し出す速度が一定でない場合

この時、ピストン付近の圧力を p_p 、水が流出するところ付近の圧力を p_o 、基準面の高さ h を水が流出するところとすると、ベルヌーイの定理より次式が成り立つ。

$$\frac{1}{2} \rho \cdot 0 + \rho g h + p_p = \frac{1}{2} \rho v_o^2 + \rho g h + p_o$$

ただし、 ρ, g はそれぞれ水の密度と重力加速度を表す。この式を v_o について解くと、

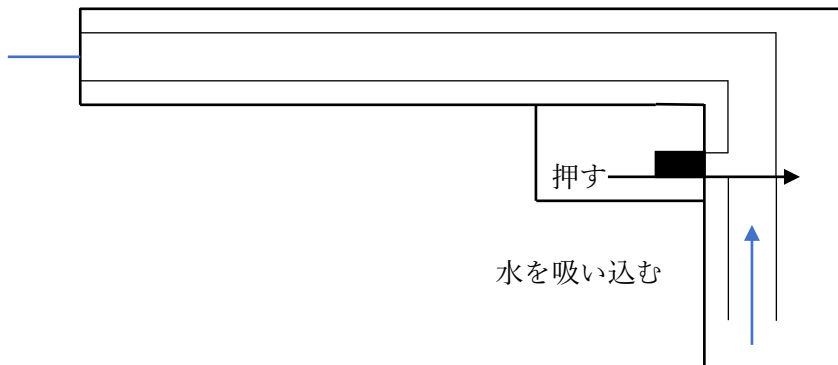
$$v_o = \sqrt{\frac{2(p_p - p_o)}{\rho}}$$

となる。この式からピストンを押し出す速度が一定でない時、流速は竹水鉄砲の端とピストン付近の圧力の差に比例する。また、水の密度に反比例するので100[°C]の時、水の密度は約958.4[kg/m³]となり、密度が最も小さくなるので流速が大きくなる。

4 一般的な水鉄砲の場合

ここでいう一般的な水鉄砲とは下記に示すような構造をしている水鉄砲のことである。わかりやすく言うと100円ショップなどで売っているようなものである。

水が出る



押し込むピストンはポンプの役割をしており、押し込む力の強さに比例して速度を大きくしている。この時の速度を v_p 、流速を v_o 、ピストン付近の圧力を p_p 、水が流出するところ付近の圧力を p_o 、基準面の高さをピストンの位置とし流出するところと基準面の高さの差を h とすると、次のような式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}\rho v_p^2 + \rho g \cdot 0 + p_p = \frac{1}{2}\rho v_o^2 + \rho gh + p_o$$

ただし、 ρ, g はそれぞれ水の密度と重力加速度を表す。この式を v_o について解くと、

$$v_o = \sqrt{v_p^2 + \frac{2(p_p - p_o)}{\rho} - gh}$$

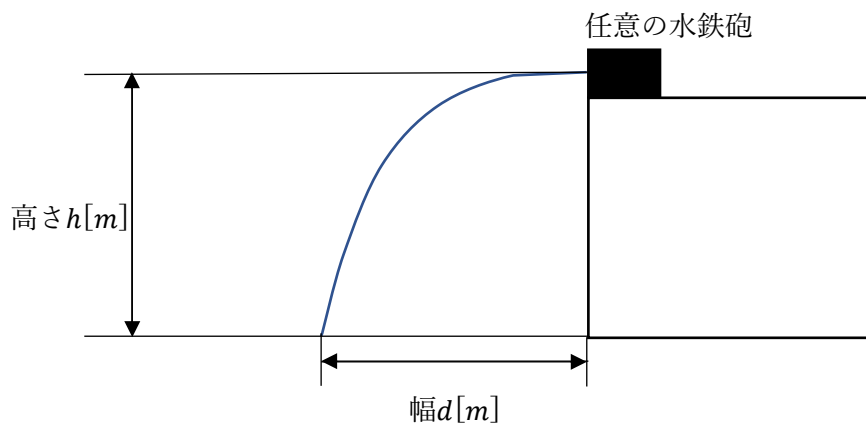
この式より、ピストンによる速度、ピストン付近の圧力と水が流出するところ付近の圧力の差が大きくなるほど流速も大きくなり、基準面からの高さが大きくなるほど流速は小さくなる。3.2と同様に100[°C]の時流速が大きくなる。また、重力加速度の大きさが小さいほど流速が大きくなるので、地球の自転により生じる遠心力により重力加速度が小さくなる赤道上で流速は大きくなる。さらに、高度による地球の重力加速度のおおよその変化は以下の式で与えられるため、高度が高いほど流速は大きくなる。

$$g_h = g_0 \left(\frac{r_e}{r_e + h} \right)^2$$

ただし、 g_h は高度 h の地球の重力加速度、 g_0 は地球の標準重力加速度($g_0 = 9.80665 [m/s^2]$)、 r_e は地球の平均半径である。

5 流速の測定方法

得られた式が妥当であるかの検証として実験による計測を行いたい。以下のような装置を考える。



ただし、 d は水が最も奥に行った着地点と水鉄砲の発射口との地表を軸としたときの距離とする。この時、水は水平投射された質点と同様に考えることが出来るので、重力加速度を g ,

任意の水鉄砲の流速を $v[m/s]$ とすると以下の式が成り立つ.

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$d = vt$$

これらを変形して,

$$v = \sqrt{\frac{d^2}{2h}g}$$

という式が導出できる. したがって, 任意の水鉄砲の流速を実験的に求めるには, 流体の着地点と, 装置の距離と装置の高さを計測すればよい.(さらに正確にやりたい場合は重力加速度を計測する) なお, 計測を行うときは乾いた土の上などで行うと着地点がわかりやすい.

6 今後の課題

3 の②と④で具体的に圧力の式を求められなかったので, ナビエストークス式などを学んでいきたいと思う. また, 4 でポンプが速度を増させる装置と説明したがどういった仕組みで速度を増させているのかが解明できなかった. 恐らくパスカルの原理によるものだがしつかり説明できなかった. 今回は時間がなく実験による計測が出来なかったのが出来るようにしたいと思う.

参考文献

- [1] 金原寿郎, 大学演習 一般物理学, 裳華房, 1989.
- [2] 金原粲, 築地徹浩, 川上幸男他編, 流体力学 シンプルにすれば「流れ」がわかる, 実教出版株式会社, 2020