多様体と Lie 群について

2020 年 6 月 12 日

芝浦工業大学 数理科学研究会

BV19321 Yuto Toyoshima

参考文献 [1] Loring W.Tu, トゥー 多様体, 裳華房, 2019.
[2] 松本 幸夫, 多様体の基礎, 東京大学出版会, 1988.

目次

♣ 第1章 多様体

◇ 多様体

位相空間 X に対して, X の開集合から $\mathbb{R}^n$ の開集合への同相写像 $f:O\to O'$ を O 上の局所座標系と呼び, (O,f) を座標近傍と呼ぶ.[*1]
ここで, 以下を満たす位相空間 X を n 次元の位相多様体 (topological manifold) と呼ぶ.
1) X は Hausdorff 空間である.　2) X の任意の点を含む座標近傍が存在する.[*2]

位相多様体の座標近傍 (O_1,f) と (O_2,g) の共通部分が存在するとき, それに属する元の (O_1,f) に関する局所座標を x, (O_2,g) に関する局所座標を y とすれば $y=g(f^{-1}(x))$ であるから, $g\circ f^{-1}:f(O_1\cap O_2)\to g(O_1\cap O_2)$ を (O_1,f) から (O_2,g) への座標変換 (coordinate transformation) と呼ぶ.
また, 任意の座標変換が C^r 級写像である位相多様体を C^r 級可微分多様体と呼び, このときのアトラスを C^r 級アトラスと呼ぶ.[*3]

(例)・$\mathbb{R}^n$ は C^∞ 級多様体である.
・$\mathbb{R}^2$ の部分位相空間である曲線 $\{(x,y)\mid xy=1\}$ は1次元の C^∞ 級多様体である.
・$\mathbb{R}^{n+1}$ の部分位相空間である n 次元球面 $S^n\equiv\{(x_1,\cdots,x_{n+1})\mid {x_1}^2+\cdots+{x_{n+1}}^2=1\}$ は C^∞ 級多様体である.
まず, ${U_i}^+=\{(x_1,\cdots,x_{n+1})\in S^n\mid x_i>0\}$ と ${U_i}^-=\{(x_1,\cdots,x_{n+1})\in S^n\mid x_i<0\}$ は S^n の開被覆である.
ここで, ${U_i}^+$ の元に対して第 i 成分を取り除く写像 ${\phi_i}^+$ は ${U_i}^+$ から $\mathbb{R}^n$ の単位開円板への写像であり, 逆写像が構成されるから同相写像である.
また, $({U_i}^+,{\phi_i}^+)$ と $({U_{i+1}}^+,{\phi_{i+1}}^+)$ の間の座標変換 ${\phi_{i+1}}^+\circ({\phi_i}^+)^{-1}$ は具体的に構成され, たしかに C^∞ 級写像である.
・S^n 上に2つの座標近傍からなる C^∞ 級アトラスが構成される.
実際, $U\equiv S^n-\{p\}$ と $V\equiv S^n-\{q\}$ $(p\equiv(0,\cdots,0,1),\ q\equiv(0,\cdots,0,-1))$ に対して同相写像 $\varphi:U\to\mathbb{R}^n$ と $\psi:V\to\mathbb{R}^n$ が以下で構成される.
まず, $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_{n+1})\in U$ に対して $\varphi(\boldsymbol{x})\equiv\left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},\cdots,\frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)\in\mathbb{R}^n$ で $\varphi:U\to\mathbb{R}^n$ を定義する.[*4]
ここで, $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ に対して $\varphi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ を満たす $\boldsymbol{x}\in S^n$ は $x_i=(1-x_{n+1})y_i$, ${x_1}^2+\cdots+{x_{n+1}}^2=1$ より $x_{n+1}=\frac{\|\boldsymbol{y}\|^2-1}{\|\boldsymbol{y}\|^2+1}$, すなわち
$\varphi^{-1}(\boldsymbol{y})=\left(\frac{2y_1}{\|y\|^2+1},\cdots,\frac{2y_n}{\|y\|^2+1},\frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1}\right)$ で構成されるから $\varphi:U\to\mathbb{R}^n$ は同相写像である.

・1次元の複素多様体として同様に構成した S^2 を Riemann 面と呼び, (U,φ) と (V,ψ) の間の座標変換は $\psi\circ\varphi^{-1}(z)=1/\bar{z}$ である.
ここで $\overline{\psi}(x)\equiv\overline{\psi(x)}$ で定められる $\overline{\psi}$ は同相写像であるから, (U,φ) と $(V,\overline{\psi})$ の間の座標変換は $\overline{\psi}\circ\varphi^{-1}(z)=1/z$ である.
よって Riemann 面は2つの $\mathbb{C}$ の貼り合わせと対応づけられ, 一方の 0 はもう一方では無限遠点に相当する.
・m 次元 C^r 級多様体と n 次元 C^r 級多様体の積空間は自然に $(m+n)$ 次元 C^r 級多様体となり, これを積多様体と呼ぶ.
(特に n 個の S^1 の積多様体を n 次元のトーラスと呼ぶ.)
・C^r 級多様体の開集合は部分位相空間として C^r 級多様体であり, これを開部分多様体 (open submanifold) と呼ぶ.
・0次元多様体は離散空間である.
・$m\times n$ 行列全体の集合 $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ から $\mathbb{R}^{mn}$ への全単射を用いれば, $\mathbb{R}^{mn}$ と同相であるような $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ の位相が構成されるから, $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ は mn 次元多様体である.
ここで行列式関数 $\det:\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ の連続性より, 一般線形群 $GL_n(\mathbb{R})=\det^{-1}(\mathbb{R}-\{0\})$ は $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ の開集合であるから n^2 次元多様体である.[*5]

◇ 極大アトラス

C^r 級多様体に対して和集合が C^r 級アトラスである2つの C^r 級アトラスは同値であるという.[*6][*7]
S と同値な C^r 級アトラスの和集合 M を (S から定まる) C^r 級極大アトラスと呼び, S は M に従属するという.
すなわち極大アトラスはそれと同値なアトラスよりも多くの座標近傍をもつ.

[*1] $f(x)$ を (O,f) に関する $x\in O$ の局所座標と呼ぶ.
[*2] これは座標近傍を構成する開集合全体の集合が X の被覆であることと同義である. また, 座標近傍全体の集合をアトラス (atlas) と呼び, 位相多様体は位相空間とアトラスで特徴づけられる.
[*3] 座標近傍の共通部分が存在しない多様体は C^∞ 級多様体として扱われる.
[*4] ベクトル方程式 $p+t(\boldsymbol{x}-p)=(tx_1,\cdots,tx_n,tx_{n+1}+(1-t))$ を意識した定義である.
[*5] 同様に $GL_n(\mathbb{C})$ は $2n^2$ 次元多様体である.
[*6] すなわち一方に属する座標近傍ともう一方に属する座標近傍の間の座標変換も C^r 級である.
[*7] 多様体の次元など同値なアトラスをもつ多様体で共通する性質を多様体の性質と呼ぶ.

♣ 第2章 射影空間

◇ 実射影空間

体に対して射影空間と呼ばれる C^∞ 級多様体を構成することができる.
$y=tx$ を満たす $t\in\mathbb{R}^\times$が存在するような $x,y\in\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ の関係は同値関係であり, このときの商空間 $\mathbb{R}P^n$ を実射影空間 (real projective space) と呼ぶ.
ここで代表元が $(a_0,\cdots,a_n)$ である同値類を $[a_0,\cdots,a_n]$ と表記し, これを $\mathbb{R}P^n$ の斉次座標 (homogeneous coordinate) と呼ぶ.

$x=\pm y$ を満たす $x,y\in S^n$ の関係 R は同値関係であり, $\bar{f}([x])\equiv[x/\|x\|]$ で定義される $\bar{f}:\mathbb{R}P^n\to S^n/R$ は全単射である.[*8]
ここで, $f(x)\equiv x/\|x\|$ で定義される $f:\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}\to S^n$ を用いて $\bar{f}$ が同相写像であることが示される.

自然な全射 $\pi_1:\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}\to\mathbb{R}P^n$ と $\pi_2:S^n\to S^n/R$ に対して, $\pi_2\circ f$ の連続性より $\bar{f}$ は連続である.
また, $g(x)\equiv x$ で定義される $g:S^n\to\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ を用いれば $\bar{g}([x])\equiv[x]$ で無矛盾に定義される $\bar{g}:S^n/R\to\mathbb{R}P^n$ の連続性も示される.
ここで $\bar{f}$ と $\bar{g}$ は互いに逆写像であるから同相写像である.

(例)・$\mathbb{R}P^1$ は S^1/R と同相であり, これは閉上半円周の端点の集合に関する接着空間と同相であるから $\mathbb{R}P^1$ は S^1 と同相である.
・$\mathbb{R}P^2$ は S^2/R と同相であり, これは閉上半球面の赤道上の対蹠点の対に関する接着空間と同相である.
実際, $H^2\equiv\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0\}$ と $D^2\equiv\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$ に対して $\phi(x,y,z)\equiv(x,y)$ で定義される $\phi:H^2\to D^2$ は同相写像であり, $a=\pm b$ を満たす $a,b\in\{(x,y,z)\in H^2 \mid z=0\}$ の同値関係を R', $a=\pm b$ を満たす $a,b\in\{(x,y)\in D^2 \mid x^2+y^2=1\}$ の同値関係を R'' とすれば, 同相写像 $\bar{\phi}:H^2/R'\to D^2/R''$ が自然に構成される.
したがって, $\mathbb{R}P^n\simeq S^2/R\simeq H^2/R'\simeq D^2/R''$ であるから D^2/R'' はおそらく $\mathbb{R}P^n$ を図示する有用な方法である.

ここで, $\mathbb{R}P^n$ を構成する同値関係は開同値関係である.

$\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ の開集合 U に対して $\pi^{-1}(\pi(U))=\cup\{tu \mid t\in\mathbb{R}-\{0\}, u\in U\}$ であり, $t\in\mathbb{R}-\{0\}$ を掛ける写像は $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ の間の同相写像であるから, $\pi^{-1}(\pi(U))$ は $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ の開集合である.
したがって, π は開写像である.

したがって, $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ は第2可算空間であるから, $\mathbb{R}P^n$ も第2可算空間である.

また, $\mathbb{R}P^n$ は Hausdorff 空間である.

前述の同値関係のグラフ R の元 (x,y) に対して, R は $\mathrm{rank}(xy)\leq 1$ を満たす $(x,y)\in(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\})\times(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\})$ 全体の集合に対応する.
これは (xy) の 2×2 小行列式が常に 0 であることと同値であり, R は有限個の多項式の零点集合であるから $(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\})\times(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\})$ の開集合である.

$\mathbb{R}P^n$ の斉次座標 $[a_0,\cdots,a_n]$ に対して $U_i\equiv\{[a_0,\cdots,a_n]\in\mathbb{R}P^n \mid a_i\neq 0\}$ が無矛盾に定義され, $\pi^{-1}(U_i)$ は $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ の開集合であるから U_i は $\mathbb{R}P^n$ の開集合である.
$\phi_0([a_0,\cdots,a_n])\equiv(a_1/a_0,\cdots,a_n/a_0)$ で定義される $\phi_0:U_0\to\mathbb{R}^n$ は, $\psi_0(a_0,\cdots,a_n)\equiv(a_1/a_0,\cdots,a_n/a_0)$ で定義される $\psi_0:\pi^{-1}(U_0)\to\mathbb{R}^n$ の連続性より連続であるし, $(b_1,\cdots,b_n)\mapsto[1,b_1,\cdots,b_n]$ は ϕ_0 の逆写像で連続であるから ϕ_0 は同相写像である.
よって同様に同相写像 $\phi_i:U_i\to\mathbb{R}^n$ を構成すれば $\{(U_i,\phi_i)\}$ は $\mathbb{R}P^n$ のアトラスであり, これを標準アトラス (standard atlas) と呼ぶ.
標準アトラスは C^∞ 級アトラスである.

$[a_0,\cdots,a_n](a_0\neq 0, a_1\neq 0)$ の U_0 における局所座標を $x_1,\cdots,x_n$, U_1 における局所座標を $y_1,\cdots,y_n$ とすれば, U_0 から U_1 への座標変換は $(\phi_1\circ\phi_0^{-1})(x)=(1/x_1,x_2/x_1,\cdots,x_n/x_1)$ であり, $\phi_0(U_0\cap U_1)$ 上では $x_1\neq 0$ であるからこれは C^∞ 級関数である.

---

*8 すなわち直線に対して対蹠点のペアを対応させている.

♣ 第3章 多様体間の写像

◇ 多様体間の写像

C^r 級多様体間の連続写像 $f:X\to Y$ と $f(O)\subset O'$ を満たす X の座標近傍 (O,φ) と Y の座標近傍 (O',ψ) に対して $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ を f の局所座標表示と呼び,
これが C^s 級である座標近傍を f の C^s 級座標近傍と呼ぶ.[*9]

ここで, 1点に関する f の C^s 級性をそれを含む座標近傍の C^s 級性で定義する.[*10]
ただしこの定義は座標近傍によらないから無矛盾である.

1点を含む (U,φ) と (V,ψ) が f の C^s 級座標近傍であるならば, その点を含む (U',φ') と (V',ψ') が f の C^s 級座標近傍であることを示す.
ここで (U',φ') と (V',ψ') に関する f の局所座標表示は $\psi'\circ f\circ\varphi'^{-1}=(\psi'\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\varphi'^{-1})$ であり,
$\varphi\circ\varphi'^{-1}$ は (U',φ') から (U,φ) への座標変換, $\psi'\circ\psi^{-1}$ は (V,ψ) から (V',ψ') への座標変換, $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ は (U,φ) と (V,ψ) に関する f の局所座標表示であるから $\psi'\circ f\circ\varphi'^{-1}$ は C^s 級である.[*11]

各点で C^s 級である f を C^s 級写像 (mapping of class C^s) と呼ぶ.[*12]
ここで, C^s 級写像の合成写像は C^s 級である.

$f:X\to Y$ と $g:Y\to Z$ が C^s 級写像であるならば, $g\circ f:X\to Z$ が C^s 級写像 $(s\geq 1)$ であることを示す. ($s=0$ である場合は明らか.)
ここで $g(V)\subset W$ を満たす $f(p)$ の座標近傍 (V,ψ) と $g(f(p))$ の座標近傍 (W,ξ) に関する g の局所座標表示 $\xi\circ g\circ\psi^{-1}$ は C^s 級写像であるし, f の連続性より $f(U)\subset V$ を満たす p の座標近傍 (U,φ) が存在するから, (U,φ) と (V,ψ) に関する f の局所座標表示 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ は C^s 級写像である.
よって $\xi\circ(g\circ f)\circ\varphi^{-1}=(\xi\circ g\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})$ は C^s 級写像である.[*13]

(例)・X の任意の座標近傍における局所座標表示が C^s 級である $f:X\to\mathbb{R}$ は C^s 級写像であり, これを C^s 級関数 (function of class C^s) と呼ぶ.
ここで C^s 級関数は同値なアトラスに対しても C^s 級関数であるから, X 上の C^s 級関数は通常, X の極大アトラスに対して与えられる.
また, 局所座標表示の偏導関数を C^s 級関数の偏導関数と呼ぶ.
・$\mathbb{R}$ の開区間 (a,b) から C^r 級多様体 X への C^s 級写像を C^s 級曲線 (C^s curve) と呼び, 始域の元をパラメータと呼ぶ.
・C^r 級多様体 X の開部分多様体 X' に対して包含写像は C^r 級写像である.
・C^r 級多様体間の C^s 級写像 $f:X\to Y$ の始域を X の開集合に制限したものは, 包含写像と f の合成写像であるから C^s 級写像である.
・C^r 級多様体 X,Y に対して射影 $\pi:X\times Y\to X$ は C^r 級写像である.
実際, $(p,q)\in X\times Y$ に対して (U,φ) と (V,ψ) を p と q を含む座標近傍とすれば, $\varphi\circ\pi\circ(\varphi\times\psi)^{-1}(x_1,\ldots,x_m,y_1,\cdots,y_n)=(x_1,\cdots,x_m)$ より
π の局所座標表示は C^r 級写像である.

C^r 級多様体間の全単射な C^s 級写像で逆写像も C^s 級であるものを C^s 級微分同相写像 (C^s diffeomorphism) と呼び, このときの始域と終域は C^s 級微分同相 (C^s diffeomorphic) であるという.
明らかに微分同相写像の合成写像は微分同相写像である.

n 次元 C^r 級多様体 X の開集合 O から $\mathbb{R}^n$ の開集合 O' への同相写像 f に対して, (O,f) が C^r 級座標近傍であることと f が C^r 級微分同相写像であることとは同値である.

(必要性) f の局所座標表示は恒等写像であるし, f^{-1} も同様であるからこれは C^r 級写像である.
(十分性) X の被覆であるとは限らない C^r 級座標近傍系 $S=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ に対して, φ_α は同様に C^r 級微分同相写像であるから, (O,f) から $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ への座標変換は C^r 級微分同相写像の合成写像である.

[*9] すなわち O の局所座標を $(x_1,\cdots,x_m)$, O' の局所座標を $(y_1,\cdots,y_n)$ としたときに $y_i(x_1,\cdots,x_m)$ がすべて C^s 級であることである.
[*10] O' が与えられたとき f の連続性より $f(O)\subset O'$ を満たす O が必ず存在するから, この条件を仮定する必要はない.
[*11] すなわち $\varphi\circ\varphi'^{-1}$ で x'_i を x_i の関数で表し, $\psi'\circ f\circ\varphi^{-1}$ で x_i を y_i の関数で表し, $\psi\circ\psi^{-1}$ で y_i を y'_i の関数で表したのである.
[*12] すなわち, C^s 級写像は任意の点とその座標近傍に関して局所座標表示が C^s 級である.
[*13] すなわち $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ で y_i を x_i の関数で表し, $\xi\circ g\circ\psi^{-1}$ で z_i を y_i の関数で表したのである.

♣ 第4章 接ベクトル空間

◇ 接ベクトル空間と速度ベクトル

$p \in X$ の近傍で定義された C^r 級関数に対して実数を掃き出す写像で以下を満たすものを p における点導分 (point-derivation) と呼ぶ.[*14]

1) p のある近傍で $\phi = \psi$ であるならば, $v(\phi) = v(\psi)$ である.

2) p の近傍で定義された ϕ, ψ に対して $v(a\phi + b\psi) = av(\phi) + bv(\psi)$ $(a, b \in \mathbb{R})$ であるし, $v(\phi\psi) = v(\phi)\psi(p) + \phi(p)v(\psi)$ である.

p における点導分全体の集合 $D_p^r(X)$ は $u+v(\phi) \equiv u(\phi)+v(\phi)$, $av(\phi) \equiv v(a\phi)$ $(u, v \in D_p^r(X),\ a \in \mathbb{R})$ で定義された演算によって $\mathbb{R}$ 上の線形空間となる.[*15]
また, X の開集合 U 上の C^r 級関数に対して, U の元に対して点導分 (が C^r 級関数に対して掃き出す値) を掃き出す写像を対応させる写像 $C^r(U) \to C^r(U)$ を U における導分 (derivation) と呼ぶ. (明らかに導分全体の集合も $\mathbb{R}$ 上の線形空間である.)

p の近傍で定義された C^r 級関数 $\phi : X \to \mathbb{R}$ に対して $\partial\phi/\partial x_i(p)$(局所座標表示の偏微分係数) を掃き出す写像 $(\partial/\partial x_i)_p$ は p における点導分であり, 1次独立である.
$(\partial/\partial x_i)_p$ で生成される部分空間 $T_p(X)$ を p における X の接ベクトル空間 (tangent vector space) と呼び, これは座標近傍に依らない.[*16]

---

p を含む座標近傍 (U, φ) の局所座標 x_i と (V, ψ) の局所座標 y_i に対して, 合成関数の微分法より以下が成り立つ.[*17]

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial(\phi\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial((\phi\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ\varphi^{-1}))}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(y_j\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}\frac{\partial(\phi\circ\psi^{-1})}{\partial y_j}(p) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial y_j}(p)$$

したがって $(\partial/\partial x_1)_p, \cdots, (\partial/\partial x_n)_p$ は $(\partial/\partial y_1)_p, \cdots, (\partial/\partial y_n)_p$ が生成する部分空間に属するし, 逆も同様である.

$f(0) = p$ を満たす C^r 級曲線 $f : \mathbb{R} \to X$ が与えられたとき, ϕ に対して $\phi\circ f(t)$ の $t=0$ における微分係数を掃き出す写像 v_f は p における点導分であり, これを f の $t=0$ における速度ベクトルと呼ぶ.
ここで, 以下が成り立つ.

1) f の速度ベクトルは接ベクトルである.

2) X の接ベクトルが ($t=0$ における) 速度ベクトルであるような C^r 級曲線 $g : \mathbb{R} \to X$ $(g(0) = p)$ が存在する.

---

1) p を含む座標近傍 (O, φ) と p の開近傍で定義された C^r 級関数 ϕ に対して以下が成り立つ.

$$v_f(\phi) = \frac{d(\phi\circ f)}{dt}(0) = \sum_{i=1}^{n}\frac{dx_i}{dt}(0)\frac{\partial(\phi\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ f)}{\partial x_i}(p) = \sum_{i=1}^{n}\frac{dx_i}{dt}(0)\frac{\partial(\phi\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(p)$$

2) p を含む座標近傍 $(x_1, \cdots, x_n)$ に対して $v = \sum v_i(\partial/\partial x_i)_p$ とすれば, $g(t) = (a_1+v_1t, \cdots, a_n+v_nt)$ で局所座標表示される g は表題を満たす.

また, 以下が成り立つ.

1) C^∞ 級多様体では $T_p(X) = D_p^\infty(X)$ である.　2) C^r 級多様体では $T_p(X) \subsetneq D_p^r(X)$ である.

---

1) まず, $v \in D_p^\infty(X)$ は定数関数に対して0を掃き出す. (実際, $f(x) \equiv 1$ で定義される $f : X \to \mathbb{R}$ に対して $v(f) = v(ff) = 2v(f)$ より $v(f) = 0$ であるから, $g(x) \equiv a$ で定義される $g : X \to \mathbb{R}$ に対して $v(g) = v(af) = av(f) = 0$ である.)
ここで, p を含む座標近傍 (U, φ) が $\varphi(p) = (0, \cdots, 0)$ を満たすならば, Taylor の定理より p の近傍で定義された C^∞ 級関数 $f : X \to \mathbb{R}$ は以下を満たす.

$f(x_1, \cdots, x_n) = f(0, \cdots, 0) + \sum \partial f/\partial x_i(0, \cdots, 0)\cdot x_i + \sum g_{ij}(x_1, \cdots, x_n)x_ix_j$ 　(g_{ij} は p の近傍で定義された C^∞ 級関数)

よって, 以下が成り立つ.

$v(f) = \sum \partial f/\partial x_i(0, \cdots, 0)v(x_i) + v(\sum g_{ij}x_ix_j) = \sum \partial f/\partial x_i(0, \cdots, 0)v(x_i) + \sum(v(g_{ij}x_i)x_j + g_{ij}x_iv(x_j)) = \sum \partial f/\partial x_i(0, \cdots, 0)v(x_i)$

したがって, $v = \sum v(x_i)(\partial/\partial x_i)_p$ であるから, $D_p^\infty(X) \subset T_p(X)$ である.

(例)・$\mathbb{R}^n$ において $(\partial/\partial x_i)_p$ は接ベクトル空間の基底であるから全単射 $(\partial/\partial x_i)_p \mapsto e_i$ によって $\mathbb{R}^n$ の接ベクトル $\sum c_i(\partial/\partial x_i)_p$ を $(c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ と同一視することができるし, f の速度ベクトルは $v_f = \sum dx_i/dt(\partial/\partial x_i)_p$ を満たすから同様に $(dx_1/dt, \cdots, dx_n/dt) \in \mathbb{R}^n$ と同一視される.
(通常, Euclid 空間上のベクトル解析における接ベクトルと速度ベクトルは後者である.)

・p を含む座標近傍 $(O; x_1, \cdots, x_n)$ に対して p の局所座標を $(a_1, \cdots, a_n)$ とすれば, $f_i(t) \equiv (a_1, \cdots, a_i+t, \cdots, a_n)$ で局所座標表示される $f_i : \mathbb{R} \to X$ は O に描かれた座標の第 i 軸に沿う曲線であり, この曲線の速度ベクトルは $(\partial/\partial x_i)_p$ である.

[*14] 以下で定義する流儀もある.
p の近傍 U と C^r 級関数 ϕ の組 (U, ϕ) に対して, W に制限すれば $\phi = \psi$ であるような $W \subset U \cap V$ が存在する (U, ϕ) と (V, ψ) に同値関係を定め, このときの (U, ϕ) の同値類を ϕ の芽 (germ) と呼び, 商集合を $C_p^\infty(X)$ と表記する.
ここで, Leipniz 則を満たす線形写像 $D : C_p^\infty(X) \to \mathbb{R}$ を p における点導分と呼ぶ.

[*15] p を含む X の開部分多様体 U に対して, $D_p^r(X) = D_p^r(U)$ である.

[*16] $\mathbb{R}^n$ の接ベクトルは n 変数関数に対する線形偏微分作用素である.

[*17] ただし, $\partial(y_j\circ\varphi^{-1})/\partial x_i$ における y_j は ψ の定義域を $U \cap V$ に制限して成分表示したものである.

♣ 第5章 写像の微分

◇ 写像の微分

C^r 級写像 $f:X\to Y$ と $p\in X$ を通る C^r 級曲線 $g:\mathbb{R}\to X$ に対して, $f\circ g:\mathbb{R}\to Y$ は $f(p)\in Y$ を通る C^r 級曲線である.
ここで, p を含む X の座標近傍 O と $f(p)$ を含む Y の座標近傍 O' に関する f の局所座標表示 $y_i=f_i(x_1,\cdots,x_m)$ は C^r 級であるから, (終域が O に含まれるように g の始域を制限すれば) 以下が成り立つ.

$$v_g=\sum\frac{dx_i}{dt}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \qquad v_{f\circ g}=\sum\left(\sum\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\frac{dx_i}{dt}(0)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)}$$

すなわち以下が成り立ち, 局所座標系に依存するこの $n\times m$ 行列 $(Jf)_p$ を p における f の Jacobi 行列と呼ぶ.

$$\begin{pmatrix}(\partial/\partial y_1)_{f(p)}\\ \vdots\\ (\partial/\partial y_n)_{f(p)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial f_1/\partial x_1(p) & \cdots & \partial f_1/\partial x_m(p)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial f_n/\partial x_1(p) & \cdots & \partial f_n/\partial x_m(p)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\partial/\partial x_1)_p\\ \vdots\\ (\partial/\partial x_m)_p\end{pmatrix}$$

ここで, $f:X\to Y$ に対して以下の写像を $p\,(\in X)$ における微分 (differential) と呼ぶ.[*18]
  $(df)_p:T_p(X)\to T_{f(p)}(Y)$: X の接ベクトル v に対して $v=v_g$ を満たす C^r 級曲線 $g:\mathbb{R}\to X$ をとってきて $v_{f\circ g}$ を対応させる写像
これは線形写像であり, Jacobi 行列は $(\partial/\partial x_i)_p$ と $(\partial/\partial y_i)_{f(p)}$ に関する微分の表現行列である.

また, 接ベクトル v と $f(p)$ の近傍で定義された C^r 級関数 $\xi:Y\to\mathbb{R}$ に対して $((df)_p(v))(\xi)=v(\xi\circ f)$ である.

---

v が速度ベクトルであるような C^r 級曲線 $g:\mathbb{R}\to X$ に対して以下が成り立つ.
  $((df)_p(v))(\xi)=v_{f\circ g}(\xi)=d(\xi\circ f\circ g)/dt(0)=v_g(\xi\circ f)=v(\xi\circ f)$

(例)・$(df)_p((\partial/\partial x_i)_p)=\sum\partial f_j/\partial x_i(p)(\partial/\partial y_j)_{f(p)}$ $(y_j=f_j(x_1,\cdots,x_n))$ である.
 ・C^r 級関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ に対して $V(f)\equiv df(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})/dt|_{t=0}=\sum v_i\cdot\partial f/\partial x_i(p)$ を $p\in\mathbb{R}^n$ における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分と呼び, V は p における接ベクトルである.[*19]
  ここで, $(df)_p(V)=\sum v_i(df)_p((\partial/\partial x_i)_p)=\sum v_i(\partial f/\partial x_i(p)(d/dy)_{f(p)})=V(f)(d/dy)_{f(p)}$ より f の微分は接ベクトルに対して, それに対応する方向の f の方向微分を係数とする接ベクトルを掃き出す.
 ・C^r 級曲線 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ に対して $(df)_p((d/dt)_p)=\sum dx_i/dt(p)(\partial/\partial x_i)_{f(p)}$ であるから, f の微分は接ベクトル空間の基底に対して速度ベクトルを掃き出す.

X,Y,Z が l 次元, m 次元, n 次元の C^r 級多様体であるならば, $f:X\to Y$ と $g:Y\to Z$ に対して $d(g\circ f)_p=(dg)_{f(p)}\circ(df)_p$ である. (合成写像の微分)

$v\in T_p(X)$ が $t=0$ における速度ベクトルであるような C^r 級曲線 $\varphi:\mathbb{R}\to X$ が存在するから, 以下が成り立つ.
  $d(g\circ f)_p(v)=d(g\circ f\circ\varphi)/dt|_{t=0}=(dg)_{f(p)}(d(f\circ\varphi)/dt|_{t=0})=(dg)_{f(p)}\circ(df)_p(v)$

よって, Jacobi 行列に対して $J(g\circ f)_p=(Jf)_p\circ(Jg)_{f(p)}$ である.

また, C^r 級微分同相写像 $f:X\to Y$ の微分は (線形写像として) 同型写像であり, $(df)_p^{-1}=(df^{-1})_{f(p)}$ である.

Jacobi 行列より X における恒等写像の微分は $T_p(X)$ における恒等写像と等しいから $(df^{-1})_{f(p)}\circ(df)_p=id_{T_p(X)}$, $(df)_p\circ(df^{-1})_{f(p)}=id_{T_{f(p)}(Y)}$ である.

よって, 以下が成り立つ.
 1) $p\in X$ を含む座標近傍を固定すれば, $J(id_X)_p=E$ である.
 2) C^r 級微分同相写像の始域と終域の座標近傍を固定すれば, $(Jf)_p$ は正則行列であり $(Jf^{-1})_{f(p)}=(Jf)_p^{-1}$ である.
 3) C^r 級微分同相である多様体の次元は一致する.

(例)・線形写像 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ に対応する行列 A は $x\in\mathbb{R}^m$ における Jacobi 行列である.
  特に f が C^∞ 級微分同相写像であることと A が正則であることとは同値である.

[*18] $t=0$ における $f\circ g$ の速度ベクトルは $t=0$ における g の速度ベクトルとその点における Jacobi 行列で一意に構成されるから, 微分の定義は無矛盾である.
[*19] すなわち $\mathbb{R}^n$ の接ベクトルは f に対して $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分を掃き出す.

♣ 第6章 微分の単射性と全射性

◇ はめ込みと沈め込み

$p\in X$ に対して微分が単射である C^r 級写像 $f:X\to Y$ を p におけるはめ込み (immersion) と呼び, 全射である C^r 級写像を p における沈め込み (submersion) と呼ぶ. ここですべての点におけるはめ込みを単にはめ込みと呼び, 沈め込みも同様である.
また, 多様体の次元とその接ベクトル空間の次元は一致するから, はめ込みが存在するならば $\dim X\leq\dim Y$ であるし, 沈め込みが存在するならば $\dim X\geq\dim Y$ である.

ここで, 微分の像空間の次元を $p\in X$ における f の微分の階数 (rank) と呼び, $(\mathrm{rank}\, f)(p)$ と表記する.
したがって, 以下が成り立つ.
1) f の微分が全射であることと, $\dim X\geq\dim Y$ かつ f の微分の階数が $\dim Y$ であることとは同値である.
2) f の微分が単射であることと, $\dim X\leq\dim Y$ かつ f の微分の階数が $\dim X$ であることとは同値である.

また, Jacobi 行列は微分の表現行列であるから, 微分の階数と Jacobi 行列の階数は等しい.[*20]
ここで, Jacobi 行列は $(\dim Y\times\dim X)$ 行列であるから以下が成り立つことに注意されたい.
1) f の微分の階数が $\dim Y$ であることと Jacobi 行列の 0 でない $(\dim Y\times\dim Y)$ 小行列式が存在することとは同値である.[*21]
2) f の微分の階数が $\dim X$ であることと Jacobi 行列の 0 でない $(\dim X\times\dim X)$ 小行列式が存在することとは同値である.

(例)・Euclid 空間間の包含写像ははめ込みであるし, 射影は沈め込みである.
・X の開部分多様体 U に対して包含写像 $U\to X$ ははめ込みかつ沈め込みである. (このように, 沈め込みは全射であるとは限らない.)
・包含写像 $S^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ ははめ込みである.
実際, S^n の座標近傍 (U^+_{n+1},ϕ^+_{n+1}) における $i:S^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ の局所座標表示は $(x_1,\cdots,x_n)\mapsto(x_1,\cdots,x_n,\sqrt{1-(x_1^2+\cdots+x_n^2)})$ であるから $(di)_p:T_p(S^n)\to T_{i(p)}(\mathbb{R}^{n+1})$ は単射である.
・$f(\theta)\equiv(\cos\theta,\sin\theta)$ で定義される $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ ははめ込みである.
・$g(t)\equiv(t^2(1-t)/(t^3+(1-t)^3),\ t(1-t)^2/(t^3+(1-t)^3))$ で定義される $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ ははめ込みであり, この像空間を Descartes の葉線と呼ぶ.

◇ 臨界点と正則点

$f:X\to Y$ に対して微分が全射である点を正則点 (regular point) と呼び, そうでない点を臨界点 (critical point) と呼ぶ.[*22]
また, 臨界点に対して f が掃き出す値を臨界値 (critical value) と呼び, それ以外の Y の点を正則値 (regular value) と呼ぶ.[*23]

ここで, C^r 級関数 $f:X\to\mathbb{R}$ に対して $p\in X$ が f の臨界点であることと $\partial f/\partial x_i(p)=0$ $(i=1,\cdots,n)$ を満たす p を含む座標近傍が存在することとは同値である.

---

f の微分の像空間は $\mathbb{R}$ の部分線形空間と同型であるからその次元は 0 あるいは 1 である. (すなわち, 微分は零写像であるか全射である.)
したがって, 微分の表現行列が Jacobi 行列であることから, 微分が全射でないことすべての偏微分係数が 0 であることとは同値である.

◇ 部分多様体

n 次元 C^r 級多様体 X の部分集合 S で以下を満たすものを k 次元 C^r 級部分多様体 (submanifold) と呼ぶ.[*24]
・$p\in S$ に対して $S\cap U$ の元の局所座標表示の第 $k+1$ 成分以降が常に 0 であるような p を含む座標近傍 (U,ϕ) が存在する. (このときの $\{(U,\phi)\}$ を適合する座標近傍系と呼ぶ.)
これは k 次元 C^r 級多様体である.

$k<n$ である場合のみを考えればよい.
まず, Hausdorff 空間の部分位相空間は Hausdorff 空間であるし, $p\in S$ に対して $S\cap U$ の元の局所座標表示の第 $k+1$ 成分以降が常に 0 であるような p を含む座標近傍を (U,ϕ) とすれば, $\phi(u)=(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots,0)$ $(u\in S\cap U)$ に対して $\phi'(u)\equiv(x_1,\cdots,x_k)$ で $\phi':S\cap U\to\mathbb{R}^k$ が定義される.
ここで, $(S\cap U,\phi')$ と $(S\cap U',\psi')$ の共通部分が存在するならば, $\psi'\circ\phi'^{-1}(x_1,\cdots,x_k)=(y_1,\cdots,y_k)$ であるが $\psi\circ\phi^{-1}$ の C^r 級性よりこれは C^r 級写像である.
よって, $\{(S\cap U,\phi')\}$ は S の C^r 級アトラスである.

(例)・$S\equiv(-1,1)\times\{0\}$ は $\mathbb{R}^2$ の 1 次元部分多様体であり, たとえば $\{(-1,1)\times(-1,1)\}$ は適合する座標近傍系である.
・区間 $(0,1)$ で定義された関数 $f(x)=\sin(1/x)$ のグラフ Γ と $I\equiv\{(0,y)\in\mathbb{R}^2\mid -1<y<1\}$ の和集合は $\mathbb{R}^2$ の部分多様体でない.[*25]

[*20] 写像の微分は座標近傍のとり方に依らないから, Jacobi 行列の階数も座標近傍のとり方に依らない.
[*21] すなわち正則な $(\dim Y\times\dim Y)$ 小行列が存在する.
[*22] すなわち, $p\in X$ が f の正則点であることと f が p における沈め込みであることとは同義である.
[*23] すなわち, f の終域に属さない元も正則値である.
また, 正則点に対して f が掃き出す元が正則値であるとは限らない. 実際, $q\in Y$ が f の臨界値であることと $f^{-1}(\{q\})$ に属する臨界点が存在することとは同値であるし, $q\in f(X)$ が f の正則値であることと $f^{-1}(\{q\})$ のすべての元が正則点であることとは同値である.
[*24] $k=n$ であるとき, S が開集合であるならば開部分多様体と呼び, 閉集合であるならば閉部分多様体と呼ぶ.
[*25] Γ の閉包 (すなわち $\Gamma\cup I$ と 1 点集合 $(1,\sin 1)$, $(0,1)$, $(0,-1)$ の和集合) を位相幾何学者の正弦曲線と呼ぶ.

◇ 等位集合

$f^{-1}(y)\equiv\{x\in X \mid f(x)=y\}$ を $f:X\to Y$ の $y\in Y$ に関する等位集合 (level set) と呼び, 正則値に関する等位集合を正則等位集合と呼ぶ.[26]

(例)・S^2 は $f(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2-1$ で定義される $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ の 0 に関する等位集合である.
ここで, f の臨界点は $(0,0,0)$ のみであるから S^2 は f の正則等位集合である.

ここで, 以下が成り立つ.
1) C^∞ 級関数 $g:X\to\mathbb{R}$ に対して正則等位集合 $g^{-1}(c)$ は, $f(x)\equiv g(x)-c$ で定義される $f:X\to\mathbb{R}$ の正則等位集合 $f^{-1}(0)$ と一致する.
2) C^∞ 級関数 $g:X\to\mathbb{R}$ に対して空でない正則等位集合 $g^{-1}(c)$ は X の $n-1$ 次元部分多様体である.

---

1) $p\in X$ が $g(p)=c$ を満たすことと $f(p)=0$ を満たすこととは同値であるし, f と g は微分が等しいから臨界点が一致する.
よって $g^{-1}(c)$ に g の臨界点が存在しないことから $f^{-1}(0)$ に f の臨界点は存在しない.
2) $f(x)\equiv g(x)-c$ で $f:X\to\mathbb{R}$ を定義すれば, $p\in g^{-1}(c)$ は f の正則点であるから p を含む座標近傍 (U,ϕ) に対して $(\partial f/\partial x_i)(p)\neq 0$ を満たす i が存在する. (以降, $i=1$ とする.)
ここで $\psi(p)\equiv(f(p),x_2(p),\cdots,x_n(p))$ で $\psi:U\to\mathbb{R}^n$ を定義すればこのヤコビアンは $(\partial f/\partial x_1)(p)\neq 0$ であるから, 逆関数定理より (U_p,ψ) が座標近傍であるような p の近傍 U_p が存在する.
したがって, $\{(U_p,\psi) \mid p\in g^{-1}(c)\}$ は適合する座標近傍系であり, $g^{-1}(c)$ は X の $n-1$ 次元部分多様体である.

これは以下のように拡張される.
正則等位集合定理：C^∞ 級写像 $f:X\to Y$ に対して空でない正則等位集合 $f^{-1}(c)$ は X の $(\dim X-\dim Y)$ 次元部分多様体である.[27]

Y の座標近傍 $(V,\psi)=(V;y_1,\cdots,y_m)$ が $\psi(c)=0$ を満たすならば, $f^{-1}(V)$ は $f^{-1}(c)$ を含む X の開集合であるし, $f^{-1}(c)=(\psi\circ f)^{-1}(0)$ である.
ここで, $f_i\equiv y_i\circ f$ で $f_i:X\to\mathbb{R}$ を定義して, $p\in f^{-1}(c)$ を含む X の座標近傍で $U\subset f^{-1}(V)$ を満たすような $(U,\varphi)=(U;x_1,\cdots,x_n)$ をとれば, p は f の正則点であるから Jacobi 行列 $(\partial f_i/\partial x_j(p))$ の階数は $\dim Y$ である.
このとき, $(\dim Y\times\dim Y)$ ブロック行列 $(\partial f_i/\partial x_j(p))_{1\le i,j\le m}$ が正則行列であるとすれば, p を含む $(U_p;f_1,\cdots,f_m,x_{m+1},\cdots,x_n)$ は X の座標近傍である. (実際, p における Jacobi 行列の行列式は 0 でないから, 逆関数定理より明らか.)
したがって, $\{(U_p;f_1,\cdots,f_m,x_{m+1}.\cdots,x_n)\}$ は適合する座標近傍系である.

(例)・$S\equiv\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^3+y^3+z^3=1\}$ は $\mathbb{R}^3$ の 2 次元部分多様体である.
実際, $f(x,y,z)\equiv x^3+y^3+z^3$ で定義される $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ に対して $S=f^{-1}(1)$ であり, f の臨界点は $(0,0,0)$ のみであるから正則等位集合定理より明らか.
・$S\equiv\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^3+y^3+z^3=1,\ x+y+z=0\}$ は $\mathbb{R}^3$ の 1 次元部分多様体である.
実際, $f(x,y,z)\equiv(x^3+y^3+z^3,x+y+z)$ で定義される $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ に対して $S=f^{-1}(1,0)$ であり, f の臨界点は $(0,0,0)$ のみであるから正則等位集合定理より明らか.
・特殊線形群 $SL_n(\mathbb{R})$ は一般線形群 $GL_n(\mathbb{R})$ の n^2-1 次元部分多様体である.
実際, $f(A)\equiv\det A$ で定義される $f:GL_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ に対して $SL_n(\mathbb{R})=f^{-1}(1)$ であり, 余因子展開より f の臨界点は零行列のみであるから正則等位集合定理より明らか.

また, 以下が知られている.
Sard の定理：C^∞ 級写像 $f:X\to Y$ の臨界値全体の集合は Lebesgue 測度 0 をもつ.

◇ はめ込み定理と沈め込み定理

まず, 以下のように階数一定定理が多様体間に拡張される.
階数一定定理：$f:X\to Y$ の微分の階数が $p\in X$ の近傍で k であるならば, $(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(x_1,\cdots,x_m)=(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots,0)$ を満たす, p の局所座標が 0 であるような X の座標近傍 (U,φ) と $f(p)$ の局所座標が 0 であるような Y の座標近傍 (V,ψ) が存在する.

---

p を含む X の座標近傍 $(\bar{U},\bar{\varphi})$ と $f(p)$ を含む Y の座標近傍 $(\bar{V},\bar{\psi})$ に対して $\bar{\psi}\circ f\circ\bar{\varphi}^{-1}$ は Euclid 空間の開集合の間の写像であり, $\bar{\psi}$ と $\bar{\varphi}$ は微分同相写像であるから, $\tilde{U}$ で $\bar{\psi}\circ\bar{\varphi}^{-1}$ の微分の階数が k であるような $\bar{\varphi}(p)\in\mathrm{R}^m$ の近傍 $\tilde{U}$ が存在する.
よって, Euclid 空間における階数一定定理より $(F\circ\bar{\psi}\circ f\circ\bar{\varphi}^{-1}\circ G^{-1})(x_1,\cdots,x_m)=(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots,0)$ を満たす $\tilde{U}$ 上の微分同相写像 G と, $(\bar{\psi}\circ f)(p)\in\mathbb{R}^n$ の近傍 $\tilde{V}$ 上の微分同相写像 F が存在する.
したがって, $U=\bar{\varphi}^{-1}(\tilde{U})$, $V=\bar{\varphi}^{-1}(\tilde{V})$, $\varphi=G\circ\bar{\varphi}$, $\psi=F\circ\bar{\psi}$ とすればよい.

したがって, 以下が成り立つ.
階数一定等位集合定理：C^∞ 級写像 $f:X\to Y$ に対して等位集合 $f^{-1}(c)$ の各点で f の微分の階数が k であるならば, $f^{-1}(c)$ は X の $(\dim X-k)$ 次元部分多様体である.

$p\in f^{-1}(c)$ に対して階数一定定理より $(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(x_1,\cdots,x_m)=(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots,0)$ を満たす p の局所座標が 0 であるような X の座標近傍 (U,φ) と c の局所座標が 0 であるような Y の座標近傍 (V,ψ) が存在する.
したがって $\varphi(f^{-1}(c))=\varphi(f^{-1}(\psi^{-1}(0)))=(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})^{-1}(0)$ であるから φ が $f^{-1}(c)$ の元に対して掃き出す値は $(0,\cdots,0,x_{k+1},\cdots,x_m)$ である.
すなわち, $\{(U,\varphi)\}$ を適合する座標近傍系とすれば $f^{-1}(c)$ は $(\dim X-k)$ 次元部分多様体である.

(例)・直交群 $O_n(\mathbb{R})$ は一般線形群 $GL_n(\mathbb{R})$ の部分多様体である.
実際, $f(A)\equiv{}^tAA$ で定義される $f:GL_n(\mathbb{R})\to GL_n(\mathbb{R})$ に対して $O_n(\mathbb{R})=f^{-1}(E)$ であり, $A\in GL_n(\mathbb{R})$ に対して $B\in GL_n(\mathbb{R})$ に関する左乗法を l_B, 右乗法を r_B とすれば, $f\circ r_B=l_{{}^tB}\circ r_B\circ f$ であるから合成関数の微分法より $(df)_{AB}\circ(dr_B)_A=(dl_{{}^tB})_{{}^tAAB}\circ(dr_B)_{{}^tAA}\circ(df)_A$ である.
ここで, 左乗法と右乗法は微分同相写像であるからその微分は同型写像である.
よって, $(\mathrm{rank}\,f)(AB)=(\mathrm{rank}\,f)(A)$ であり A と AB は $GL_n(\mathbb{R})$ の任意の元であるから階数一定等位集合定理より明らか.

ここで, f が p におけるはめ込みまたは沈め込みであることは, $p\in X$ を含む座標近傍 (U,φ) と $f(p)\in Y$ を含む座標近傍 (V,ψ) に関するヤコビアンの階数が最大であることと同値であるが, f のヤコビアンが最大である $p\in U$ 全体の集合は U の開集合である.
実際, これの補集合は Jacobi 行列のすべての $k\times k$ 小行列式が 0 であるような元全体の集合であるから, 行列式関数の連続性より明らかである.

---

[26] $f:X\to Y$ の空でない正則等位集合の元はすべて正則値であるから, f はこれらにおける沈め込みである.
[27] この逆は成り立たない. たとえば $f(x,y)\equiv y^2$ で定義される $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ に対して $f^{-1}(0)$ は $\mathbb{R}^2$ の部分多様体であるが, この元は f の臨界点であるから $f^{-1}(0)$ は正則等位集合でない.

したがって, 以下が成り立つ.
1) C^∞ 級写像 $f:X\to Y$ が $p\in X$ におけるはめ込みであるならば, f の微分の階数が $\dim X$ であるような p の近傍が存在する.
2) C^∞ 級写像 $f:X\to Y$ が $p\in X$ における沈め込みであるならば, f の微分の階数が $\dim Y$ であるような p の近傍が存在する.

よって, 階数一定定理より以下が成り立つ.[*28]
はめ込み定理 : $p\in X$ におけるはめ込み $f:X\to Y$ に対して, $(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(x_1,\cdots,x_m)=(x_1,\cdots,x_m,0,\cdots,0)$ を満たす, p の局所座標が 0 であるような X の座標近傍 (U,φ) と $f(p)$ の局所座標が 0 であるような Y の座標近傍 (V,ψ) が存在する.
沈め込み定理 : $p\in X$ における沈め込み $f:X\to Y$ に対して, $(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1},\cdots,x_m)=(x_1,\cdots,x_n)$ を満たす, p の局所座標が 0 であるような X の座標近傍 (U,φ) と $f(p)$ の局所座標が 0 であるような Y の座標近傍 (V,ψ) が存在する.
ここで, はめ込み定理と沈め込み定理は階数一定定理の特別な場合であるが, 正則等位集合定理は階数一定等位集合定理の特別な場合である.

また, 沈め込みは開写像である.

沈め込み定理より $f:X\to Y$ は局所的に射影であり, 射影は開写像であるから, X の開集合 O に対して部分位相空間 O における $p\in O$ の開近傍 U で $f(U)(\subset f(O))$ が開集合であるものが存在する.
よって, $f(O)$ は Y の開集合である.

◇ 埋め込みとはめ込まれた部分多様体

終域を部分位相空間 $f(X)$ に制限したものが同相写像であるようなはめ込み $f:X\to Y$ を埋め込み (imbedding) と呼ぶ.
ここで, 埋め込みの像空間は Y の部分多様体である.

はめ込み定理より, $p\in X$ に対して $(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(x_1,\cdots,x_m)=(x_1,\cdots,x_m,0,\cdots,0)$ を満たす, p の局所座標が 0 であるような X の座標近傍 (U,φ) と $f(p)$ の局所座標が 0 であるような Y の座標近傍 (V,ψ) が存在する.
しかし, $f(U)$ が $V\cap f(X)$ の真部分集合である場合は $\{(V,\psi)\}$ は適合する座標近傍系でないから, V において局所座標が $(x_1,\cdots,x_m,0,\cdots,0)$ であるような $f(p)$ の近傍が存在することを示さなければならない.
ここで, 部分位相空間 $f(X)$ は X と同相であるから $f(U)$ は $f(X)$ の開集合であり, $V'\cap f(X)=f(U)$ を満たす Y の開集合 V' が存在する.
よって, $V\cap V'\cap f(X)=f(U)$ であるから $\{(V\cap V',\psi)\}$ は適合する座標近傍系である.

また, X の部分多様体 U に対して, 包含写像 $i:U\to X$ は埋め込みである.

$p\in U$ を含む X の適合する座標近傍を (V,φ) とすれば, U の座標近傍 $(V\cap U,\varphi')$ と X の座標近傍 (V,φ) に関する包含写像の局所座標表示は $(x_1,\cdots,x_m)\mapsto(x_1,\cdots,x_m,0,\cdots,0)$ である. したがって, 包含写像ははめ込みである.
また, U は X の部分位相空間であるから, 終域を制限した包含写像 $i:U\to i(U)$ は同相写像である.

したがって, ある埋め込みの像空間であることと部分多様体であることとは同値であるから, 部分多様体を埋め込まれた部分多様体 (imbedded submanifold) と呼ぶことがある.

(例)・包含写像 $S^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ は埋め込みである.
・$f(\theta)\equiv(\cos\theta,\sin\theta)$ の像空間 S^1 は $\mathbb{R}$ と同相でないから, f は埋め込みでない.
・Descartes の葉線は $g(0)=g(1)$ より単射でないから埋め込みでない.

終域を $f(X)$ に制限したものが全単射であるようなはめ込みに対して, この全単射な写像が同相写像であるように $f(X)$ に X から誘導される位相を与える.
これに X から誘導されるアトラスを与えたものを Y のはめ込まれた部分多様体 (immersed submanifold) と呼ぶ. (ここで, はめ込まれた部分多様体に部分位相を与えたものは多様体であるとは限らない.)[*29]

(例)・$f(t)\equiv(\cos t,\sin 2t)$ で定義される $f:(-\pi/2,3\pi/2)\to\mathbb{R}^2$ の像空間を 8 の字曲線と呼び, これは $\mathbb{R}^2$ のはめ込まれた部分多様体であるが, 部分多様体ではない.
また, $g(t)\equiv(\cos t,-\sin 2t)$ で定義される $g:(-\pi/2,3\pi/2)\to\mathbb{R}^2$ の像空間も 8 の字曲線であるが, 前述のはめ込まれた部分多様体とは位相とアトラスが異なる.

ここで, C^∞ 級写像 $f:X\to Y$ の像空間が Y の部分多様体 S に含まれているならば, 終域を制限した $\bar{f}:X\to S$ も C^∞ 級写像である.

$p\in X$ に対して $f(p)\in S$ を含む適合する座標近傍 $(V,\psi)=(V;y_1,\cdots,y_n)$ が存在するし, f の連続性より $f(U)\subset V$ を満たす p の近傍 U が存在する.
ここで $f(U)\subset V\cap S$ であるから, $q\in U$ に対して $(\psi\circ f)(q)=(y_1(f(q)),\cdots,y_s(f(q)),0,\cdots,0)$ である.
よって, 部分多様体上の局所座標系を $\psi_S:V\cap S\to\mathbb{R}^s$ とすれば, $\psi_S\circ\bar{f}=(y_1\circ f,\cdots,y_s\circ f)$ の各成分は U 上の C^∞ 級関数である.

(例)・一般線形群 $GL_n(\mathbb{R})$ における乗法は C^∞ 級写像であるが, 特殊線形群 $SL_n(\mathbb{R})$ における乗法の C^∞ 級性は非自明である.
ここで, $SL_n(\mathbb{R})\times SL_n(\mathbb{R})$ は $GL_n(\mathbb{R})\times GL_n(\mathbb{R})$ の部分多様体であるから, 包含写像 $i:SL_n(\mathbb{R})\times SL_n(\mathbb{R})\to GL_n(\mathbb{R})\times GL_n(\mathbb{R})$ は C^∞ 級写像 (埋め込み) である.
したがって, $GL_n(\mathbb{R})$ における乗法を μ とすれば $\mu\circ i$ も C^∞ 級写像であるから, $SL_n(\mathbb{R})$ における乗法も C^∞ 級写像である.

[*28] すなわち, はめ込みに対して局所座標表示が包含写像であるような座標近傍が存在し, 沈め込みに対して局所座標表示が射影であるような座標近傍が存在する. (これがはめ込みと沈め込みの名称の由来である.)
[*29] はめ込まれた部分多様体は多様体であるが, 部分多様体 (正則部分多様体と呼ばれる) とは異なる概念であることに注意されたい.

♣ 第7章 1の分割

◇ 隆起関数

多様体 X に対して $\{x\in X \mid f(x)\neq 0\}$ の閉包を $f:X\to\mathbb{R}$ の台 (support) と呼び, $\mathrm{supp}f$ と表記する.
ここで, $x\in X$ の近傍 U に対して, 以下を満たす連続な非負関数 $\rho:X\to\mathbb{R}$ を U に属する x における隆起関数 (bump function) と呼ぶ.
1) $\mathrm{supp}\rho\subset U$ である.　2) ρ の掃き出す値が常に 1 であるような x の近傍が存在する.

(例)・$f(x)\equiv\tan(\pi x/2)$ で定義される $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ の台は $(-1,1)$ である.
・$f(x)\equiv\begin{cases}0 & (x\leq -1,\ 1\leq x)\\ 2x+2 & (-1<x<-1/2)\\ 1 & (-1/2\leq x\leq 1/2)\\ -2x+2 & (1/2<x<1)\end{cases}$ で定義される $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $(-2,2)$ に属する 0 における隆起関数である.

$f(t)\equiv\begin{cases}e^{-1/t} & (t>0)\\ 0 & (t\leq 0)\end{cases}$ で定義される C^∞ 級関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して C^∞ 級の隆起関数を構成する.
まず, $g(t)\equiv f(t)/(f(t)+f(1-t))$ は C^∞ 級関数である.

$t\leq 0$ であるならば $g(t)=0$ であるし, $t\geq 1$ であるならば $g(t)=1$ である.
また, $t>0$ であるならば $f(t)+f(1-t)\geq f(t)>0$ であるし, $t\leq 0$ であるならば $f(t)+f(1-t)=f(1-t)>0$ であるから $f(t)+f(1-t)$ は C^∞ 級の非負関数であり, $g(t)$ は C^∞ 級関数である.

ここで, $b>a(>0)$ に対して $x\mapsto(x-a^2)/(b^2-a^2)$ は $[a^2,b^2]$ を $[0,1]$ に移す線形変換であるから, $h(x)\equiv g((x-a^2)/(b^2-a^2))$ で定義される $h:\mathbb{R}\to[0,1]$ は $x\leq a^2$ であるならば 0 を掃き出し, $x\geq b^2$ であるならば 1 を掃き出す C^∞ 級関数である.
また, $k(x)\equiv h(x^2)$ で定義される $k:\mathbb{R}\to[0,1]$ は $-a\leq x\leq a$ であるならば 0 を掃き出し, $x\leq b$ あるいは $b\leq x$ であるならば 1 を掃き出す C^∞ 級関数であるから, $\rho(x)\equiv 1-k(x)$ で定義される $\rho:\mathbb{R}\to[0,1]$ は 0 における C^∞ 級の隆起関数であり, $\mathrm{supp}\rho=[-b,b]$ である.
(したがって, $\rho(x-r)$ は $r\in\mathbb{R}$ における C^∞ 級の隆起関数である.)

$\mathbb{R}^n$ に対しても同様に隆起関数が構成される.
すなわち, $\sigma(x)\equiv\rho(\|x\|)$ で定義される $\sigma:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ は 0 における C^∞ 級の隆起関数であり, 閉球 $\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|\leq b\}$ が台である.

一般に X の開集合 U における C^∞ 級関数の定義域を X に拡張することはできないが, 1 点のある近傍で一致するような X 上の関数は存在する.
すなわち, $p\in X$ の近傍 U で定義された C^∞ 級関数 $f:U\to\mathbb{R}$ に対して, p の近傍 $V(\subset U)$ で f と一致するような C^∞ 級関数 $\bar{f}:X\to\mathbb{R}$ が存在する.

U に属する C^∞ 級の隆起関数 $\rho:X\to\mathbb{R}$ で $p\in X$ の近傍 V 上で 1 を掃き出すものを選ぶ.
このとき, $\bar{f}(q)\equiv\begin{cases}\rho(q)f(q & (q\in U)\\ 0 & (q\notin U)\end{cases}$ で定義される $\bar{f}$ は U 上で C^∞ 級関数であるし, $q\notin U$ は $\mathrm{supp}\rho$ に属さないから q を含む開集合で $\bar{f}$ の掃き出す値が 0 であるようなものが存在する. (すなわち, $\bar{f}$ は $q\notin U$ においても C^∞ 級関数である.)
また, V 上で $\bar{f}=f$ である.

◇ 1の分割

X の有限開被覆 $\{U_i\}$ に対して, $\mathrm{supp}\rho_i\subset U_i$ かつ $\sum\rho_i(x)=1$ $(x\in X)$ を満たす非負関数 $\rho_i:X\to\mathbb{R}$ を $\{U_i\}$ に従属する C^∞ 級の 1 の分割 (partition of unity) と呼ぶ. (開被覆が無限集合であるならば有限個の U_i のみと交わる $x\in X$ の近傍が存在することを ($\{U_i\}$ の局所有限性) を条件として課す. このとき, 明らかに $\{\mathrm{sup}\rho_i\}$ も局所有限である.)

(例)・$\mathbb{R}$ の開被覆 $\{(r-1/n,r+1/n) \mid r\in\mathbb{Q},\ n\in\mathbb{Z}^+\}$ は局所有限でない.
・$\mathbb{R}$ の開区間 $U\equiv(-\infty,2)$ と $V\equiv(-1,\infty)$ に対して, グラフが以下であるような C^∞ 級関数 ρ は $\mathrm{supp}\rho\subset V$, $\mathrm{supp}(1-\rho)\subset U$ を満たすから, $\{1-\rho,\rho\}$ は $\mathbb{R}$ の開被覆 $\{U,V\}$ に従属する 1 の分割である.

♣ 第8章 接束とベクトル場

◇ 圏と関手

2つの対象 (object) A, B に対して A から B への射 (morphism) と呼ばれるもの全体の集合 $\mathrm{Mor}(A,B)$ を考え, $f\in\mathrm{Mor}(A,B)$ と $g\in\mathrm{Mor}(B,C)$ に対して合成と呼ばれる演算 $g\circ f\in\mathrm{Mor}(A,C)$ が以下を満たすものとする.[*30][*31]

1) 恒等律 : 対象 A に対して恒等射と呼ばれる $1\in\mathrm{Mor}(A,A)$ が存在し, 対象 B と $f\in\mathrm{Mor}(A,B)$ と $g\in\mathrm{Mor}(B,A)$ に対して $f\circ 1=f$, $1\circ g=g$ を満たす.
2) 結合律 : $f\in\mathrm{Mor}(A,B)$ と $g\in\mathrm{Mor}(B,C)$ と $h\in\mathrm{Mor}(C,D)$ に対して $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$ が成り立つ.

このとき, 対象と射全体の集合を圏 (category) と呼ぶ.

(例) ・集合を対象とすればその間の写像は射であるから, これらは圏である.
・群を対象とすればその間の準同型写像は射であるから, これらは圏である.
・$\mathbb{R}$ 上の線形空間を対象とすればその間の線形写像は射であるから, これらは圏である.
・位相空間を対象とすればその間の同相写像は射であるから, これらは圏である.
・C^r 級多様体を対象とすればその間の C^r 級写像は射であるから, これらは圏である.
・多様体 X と $x\in X$ に対して (X,x) を基点をもつ多様体と呼び, 2つの対象 (X,x), (Y,y) に対してその間の C^r 級写像で $f(x)=y$ を満たすものは射であるから, これらは圏である.

圏の対象 A, B に対して $g\circ f=1_A$, $f\circ g=1_B$ を満たす射 $f\in\mathrm{Mor}(A,B)$ と $g\in\mathrm{Mor}(B,A)$ を同型射 (isomorphism) と呼び, A と B は同型であるという.[*32]

圏 C, D に対して C の対象 A に対して D の対象 $F(A)$ を掃き出し, C の射 $f:A\to B$ に対して D の射 $F(f):F(A)\to F(B)$ を掃き出す対応関係で以下を満たすものを共変関手 (covariant functor) と呼ぶ.[*33]

1) $F(1_A)=1_{F(A)}$　2) $F(f\circ g)=F(f)\circ F(g)$

ここで, 関手 $F:C\to D$ に対して, $f:A\to B$ が C の同型射であるならば $F(f):F(A)\to F(B)$ は D の同型射である.

(例) ・接ベクトル空間とその間の微分の構成は基点をもつ多様体の圏から線形空間の圏への関手である.
ここで, 基点をもつ多様体の圏における同型射は C^r 級微分同相写像であり, 線形空間の圏における同型射は同型写像であることに注意されたい.

また, 圏 C, D に対して C の対象 A に対して D の対象 $F(A)$ を掃き出し, C の射 $f:A\to B$ に対して D の射 $F(f):F(B)\to F(A)$ を掃き出す対応関係で以下を満たすものを反変関手 (contravariant functor) と呼ぶ.

1) $F(1_A)=1_{F(A)}$　2) $F(f\circ g)=F(g)\circ F(f)$

◇ 接束

X の接ベクトル空間の和集合 TX を X の接束 (tengent bundle) と呼び, $\pi(v)\equiv p$ $(v\in T_p(X))$ で定義される $\pi:TX\to X$ を自然な写像と呼ぶ.[*34][*35]
以下では接束が多様体であるような位相とアトラスを与える.

X の座標近傍 (U,ϕ) に対して U の接束に属する接ベクトルを $v=\sum c_i(\partial/\partial x_i)_p$ とすれば, $\bar{\phi}(v)\equiv(x_1(p),\cdots,x_n(p),c_1,\cdots,c_n)$ で定義された $\bar{\phi}:TU\to\phi(U)\times\mathbb{R}^n$ は逆写像をもつから全単射である.
よって $\bar{\phi}$ を用いて TU に $\phi(U)\times\mathbb{R}^n$ の位相を誘導することができる.[*36][*37][*38]
X の極大アトラス $\{(U_i,\phi_i)\}$ に対して接束 TU_i の開集合全体の集合を $\mathscr{B}$ とすれば以下が成り立つ.

1) $\mathscr{B}$ は TX の被覆である.
2) TU の開集合 A と TV の開集合 B (U と V は X の座標近傍) に対して, $A\cap B$ は $T(U\cap V)$ の開集合である.

---

1) $TX=\cup T(U_i)\subset\cup\mathscr{B}\subset TX$ より明らか.
2) $T(U\cap V)$ は TU の部分空間であるから $A\cap T(U\cap V)$ と $B\cap T(U\cap V)$ は $T(U\cap V)$ の開集合である.
ここで $A\cap B\subset TU\cap TV=T(U\cap V)$ であるから $A\cap B=A\cap B\cap T(U\cap V)=(A\cap T(U\cap V))\cap(B\cap T(U\cap V))$ は $T(U\cap V)$ の開集合である.

よって, $\mathscr{B}$ が開基であるような TX の位相が存在する.

ここで, X の可算な開基で座標近傍から構成されるものが存在する.

X の可算な開基 $\mathscr{B}=\{B_i\}$ に対して $p\in U_i$ に対して $p\in B_{p,i}(\subset U_i)$ を満たす開集合 $B_{p,i}\in\mathscr{B}$ が存在するから, $\{B_{p,i}\}(\subset\mathscr{B})$ は可算集合である.
ここで X の開集合 U と $p\in U$ に対して $p\in U_i(\subset U)$ を満たす座標近傍 U_i が存在するから, $p\in B_{p,i}(\subset U)$ でありゆえに $\{B_{p,i}\}$ は X の開基である.

したがって, 以下が成り立つ.

1) 接束は第2可算集合である.　2) 接束は Hausdorff 空間である.

---

1) X の座標近傍から構成される可算集合である開基 $\{U_i\}$ に対して U_i 上の局所座標系を ϕ_i とすれば TU_i は $\mathbb{R}^{2n}$ の開集合 $\phi_i(U_i)\times\mathbb{R}^n$ と同相であるから, (Euclid 空間の部分集合の第2可算性より) TU_i は第2可算集合である.
したがってこれらの和集合は接束 TX の可算集合である開基である.

[*30] 正確には $\mathrm{Mor}(A,B)$ はクラスであるし, 圏もクラスである.
[*31] $f\in\mathrm{Mor}(A,B)$ をしばしば $f:A\to B$ と表記する.
[*32] 線形空間や群, 位相空間の同型などは圏の枠組みで統一的にまとめられる.
[*33] すなわち圏を対象とすれば関手は射である.
[*34] 自然な写像は明らかに X のアトラスや局所座標に依らない.
[*35] 異なる点の接ベクトル空間の共通部分が存在しないことに注意されたい.
[*36] U の開集合 V に対して TV の相対位相は $\bar{\phi}|_{TV}:TV\to\phi(V)\times\mathbb{R}^n$ で誘導される.
[*37] TU の位相は局所座標系のとり方に依らない. 実際, U 上の別の局所座標系 ψ に対して $\bar{\phi}\circ\bar{\psi}^{-1}:\bar{\psi}(TU)\to\bar{\phi}(TU)$ は $\mathbb{R}^{2n}$ の開集合の間の微分同相写像であるから同相写像である. すなわち, TU の部分集合 W が ψ に関して開集合であるならば $\bar{\phi}(W)=(\bar{\phi}\circ\bar{\psi}^{-1})(\bar{\psi}(W))$ より ϕ に関しても開集合であるし, 逆も同様である.
[*38] 局所座標系の微分に対して $(d\phi)_p(v)=\sum c_i(\partial/\partial r_i)_{\phi(p)}$ であるからこれを $(c_1,\cdots,c_n)\in\mathbb{R}^n$ と同一視することができる.

ここで, X の C^r 級アトラス $\{(U_i,\phi_i)\}$ に対して $\{(TU_i,\bar{\phi}_i)\}$ は TX の C^r 級アトラスであるから, C^r 級多様体の接束は C^r 級多様体である.

$(TU_i,\bar{\phi}_i)$ と $(TU_j,\bar{\phi}_j)$ に対して $\bar{\phi}_j\circ\bar{\phi}_i^{-1}:\phi_i(U_i\cap U_j)\times\mathbb{R}^n\to\phi_j(U_i\cap U_j)\times\mathbb{R}^n$ は接ベクトル $v\in T_p(X)$ が $v=\sum a_i(\partial/\partial x_i)_p=\sum b_i(\partial/\partial y_i)_p$ で書かれるならば $(\phi_i(p),a_1,\cdots,a_n)\mapsto(\bar{\phi}_j\circ\bar{\phi}_i^{-1}(\phi_i(p)),b_1,\cdots,b_n)$ である.
ここで $b_j=(\sum b_i(\partial/\partial y_i)_p)y_j=\sum a_i\partial y_j/\partial x_i(p)=\sum a_i\partial(\phi_j\circ\phi_i^{-1})_j/\partial r_i(\phi_i(p))$ (r_i は $\mathbb{R}^n$ の標準的な座標) であるから $\phi_j\circ\phi_i^{-1}$ は C^r 級写像である.

◇ ベクトル束

$f:X\to Y$ に対して $f^{-1}(y)\equiv\{x\in X\mid f(x)=y\}$ を $y\in Y$ におけるファイバー (fiber) と呼び, $f:X\to Y$ と $g:X'\to Y$ に対して $\phi(f^{-1}(y))\subset g^{-1}(y)$ を満たす $\phi:X\to X'$ をファイバーを保つ写像と呼ぶ.*39

以下を満たす多様体間の C^∞ 級写像 $f:X\to Y$ を階数 n の局所的に自明な写像と呼ぶ.
1) f は全射である.　2) ファイバーが常に n 次元の線形空間である.
3) $y\in Y$ に対して, y の近傍 U とファイバーを保つ微分同相写像 $\phi:f^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^n$ で, $\phi|_{f^{-1}(u)}:f^{-1}(u)\to\{u\}\times\mathbb{R}^n$ $(u\in U)$ が線形空間の同型写像であるようなものが存在する. (U を自明化する開集合と呼び, ϕ を U 上の X の自明化 (trivialization) と呼ぶ.)*40*41

階数 n の局所的に自明な写像 $f:X\to Y$ に対して (X,Y,f) を階数 n の C^∞ 級ベクトル束 (vector bundle) と呼び, X を全空間, Y を底空間と呼ぶ.
ここで, Y の部分多様体 S に対して $(f^{-1}(S),S,f|_{f^{-1}(S)})$ は階数 n の C^∞ 級ベクトル束であり, これを X の S への制限と呼ぶ.
(用語を濫用して X を Y 上のベクトル束と呼ぶこともあり, その意味で接束は多様体上のベクトル束である.)

(例)・多様体 X と射影 $\pi:X\times\mathbb{R}^n\to X$ に対して $(X\times\mathbb{R}^n,X,\pi)$ は階数 n のベクトル束であり, これを X 上の積束 (product bundle) と呼ぶ.*42
(たとえば, 無限円筒 $S^1\times\mathbb{R}$ は S^1 上の階数1の積束である.)

C^∞ 級ベクトル束 $f:X\to Y$ と Y の座標近傍 $(U,\psi)=(U;y_1,\cdots,y_n)$ に対して, X の U 上の自明化が $\phi(x)=(f(x),c_1(x),\cdots,c_r(x))$ で書かれるとする.
ここで $(\psi\times1)(u,c_1,\cdots,c_r)\equiv(\psi(u),c_1,\cdots,c_r)$ で $\psi\times1$ を定義すれば, $(\psi\times1)\circ\phi:f^{-1}(U)\to\psi(U)\times\mathbb{R}^r$ は微分同相写像であるから X の局所座標系である.
このときの $y_1,\cdots,y_n$ を座標近傍 $(f^{-1}(U),\psi(U)\times\mathbb{R}^r)$ における底座標と呼び, $c_1,\cdots,c_r$ をファイバー座標と呼ぶ.*43*44

(一般に階数が異なる) ベクトル束 (X,Y,f) と (M,N,g) に対して以下を満たす $\phi:Y\to N$ と $\psi:X\to M$ の組を (X,Y,f) から (M,N,g) への束写像 (bundle map) と呼ぶ. (ベクトル束を対象とすればその間の束写像は射であるから, これらは圏である.)
1) これらは可換図式をなす. (すなわち $g\circ\psi=\phi\circ f$ である.)　2) $y\in Y$ に対して $\psi:f^{-1}(y)\to g^{-1}(\phi(y))$ は線形写像である.

(例)・C^r 級多様体間の C^r 級写像 $\phi:X\to Y$ に対して $\psi(p,v)\equiv(\phi(p),(d\phi)_p(v))$ $(v\in T_p(X))$ で定義される $\psi:TX\to TY$ は ϕ と併せて束写像である.
したがって, 多様体と写像の圏からベクトル束と束写像の圏への共変関手が定まる.

X と M が Y 上のベクトル束であるならば, 底空間の写像が恒等写像であるような X から M への束写像を Y 上の束写像と呼ぶ.
Y 上の C^∞ 級ベクトル束と Y 上の束写像は圏であり, Y 上のベクトル束で積束 $Y\times\mathbb{R}^n$ と Y 上で同型であるものを自明束と呼ぶ.

◇ 切断と枠

ベクトル束 $f:X\to Y$ に対して $f\circ g=id_Y$ を満たす $g:Y\to X$ を f の切断 (section) と呼び, C^r 級写像である切断を C^r 級切断と呼ぶ.*45

C^r 級ベクトル束 $f:X\to Y$ の C^r 級切断 ϕ, ψ と C^r 級関数 $g:Y\to\mathbb{R}$ に対して以下が成り立つ.
1) $(\phi+\psi)(y)\equiv\phi(y)+\psi(y)(\in f^{-1}(y))$ で定義される $\phi+\psi:Y\to X$ は f の C^r 級切断である.
2) $(g\phi)(y)\equiv g(y)\phi(y)(\in f^{-1}(y))$ で定義される $g\phi:Y\to X$ は f の C^r 級切断である.

---

1) $y\in Y$ に対して自明化する開集合を U として, U 上の X の C^r 級自明化を $h:f^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^n$ とする.
ここで $u\in U$ に対して $(h\circ\varphi)(u)=(u,a_1(u),\cdots,a_n(u))$, $(h\circ\psi)(u)=(u,b_1(u),\cdots,b_n(u))$ を満たす $a_i:U\to\mathbb{R}$ と $b_i:U\to\mathbb{R}$ は C^r 級関数であるし, h の各点におけるファイバーは線形空間であるから $(h\circ(\varphi\circ\psi))(u)=(u,a_1(u)+b_1(u),\cdots,a_n(u)+b_n(u))$ より $\varphi\circ\psi$ は C^r 級写像である.
また, これが f の切断であることは明らかである.

したがって, ベクトル束 X の C^∞ 級切断全体の集合 $\Gamma(X)$ は $\mathbb{R}$ 上の線形空間であり, Y 上の C^∞ 級関数全体の集合 $C^\infty(Y)$ 上の加群である.
また, Y の開集合 U に対して X の U 上の C^∞ 級切断全体の集合 $\Gamma(U,X)$ は $\mathbb{R}$ 上の線形空間であり, $C^\infty(U)$ 上の加群である.
(すなわち $\Gamma(X)=\Gamma(Y,X)$ であり, これを大域切断 (global section) と呼ぶ.)

ベクトル束 $f:X\to Y$ の $U(\subset Y)$ 上の切断 $g_1,\cdots,g_n$ で掃き出す値が常にその点における f のファイバーの基底であるものを (X,Y,f) の U 上の枠 (frame) と呼ぶ. また, すべて U 上の C^r 級切断である U 上の枠を C^r 級枠と呼ぶ.

(例)・多様体 X と $\mathbb{R}^n$ の標準基底 $e_1,\cdots,e_n$ に対して $\bar{e}_i(p)\equiv(p,e_i)$ で定義される $\bar{e}_i:X\to X\times\mathbb{R}^n$ $(i=1,\cdots,n)$ は積束の C^∞ 級枠である.
・階数 n のベクトル束 $f:X\to Y$ と X の $U(\subset Y)$ における自明化 $\phi:f^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^n$ に対して $t_i(p)\equiv\phi^{-1}(\bar{e}_i(p))$ で定義される $t_i:U\to\phi^{-1}(U\times\mathbb{R}^n)$ は X の U 上の C^∞ 級枠であり, これを U 上の自明化 ϕ の C^∞ 級枠と呼ぶ.

自明化 $\phi:f^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^n$ の C^∞ 級枠 $t_1,\cdots,t_n$ に対して X の U 上の切断 $s\equiv\sum b_it_i$ が C^∞ 級切断であることと b_i が C^∞ 級関数であることとは同値である.

(必要性) $\phi\circ s(p)=\sum b_i(p)\phi(t_i(p))=\sum b_i(p)(p,e_i)=(p,\sum b_i(p)e_i)$ より $b_i(p)$ は自明化 ϕ に関する $s(p)$ のファイバー座標である.
また, $\phi\circ s$ は C^∞ 級写像であるから b_i は C^∞ 級関数である.

---

*39 f と g に対して ϕ がファイバーを保つこととこれらが可換図式をなす (すなわち $g=f\circ\phi^{-1}$ を満たす) こととは同値である.
*40 すなわち $f:f^{-1}(U)\to U$ と $g:U\times\mathbb{R}^n\to U$ に対して ϕ はファイバーを保つ.
*41 $\{U\}$ が Y の開被覆であるならば $\{(U,\phi)\}$ を局所自明化 (local trivialization) と呼ぶ. ($\{U\}$ を X を自明化する Y の開被覆と呼ぶ.)
*42 積束の局所自明化は恒等写像である.
*43 $(f^{-1}(U),\psi(U)\times\mathbb{R}^r)$ が X のアトラスであるとは限らないことに留意されたい.
*44 ファイバー座標は自明化 ϕ のみに依存する.
*45 ここで, f が全単射である必要はないから, 切断は逆写像よりも広い概念である.
また, 切断は Y の元に対してファイバーに属する元を掃き出す.

◇ ベクトル場

X の元に対してその点における接ベクトルを掃き出す写像 $F:X\to TX$ を X 上のベクトル場 (vector field) と呼び, これは接束の自然な写像の切断である.
また, C^r 級写像であるベクトル場を C^r 級ベクトル場と呼ぶ.

(例)・$F(x,y)\equiv -y(\partial/\partial x)_{(x,y)}+x(\partial/\partial y)_{(x,y)}$ で定義される F は $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場である.[*46]
・$\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $p\mapsto(\partial/\partial x)_p$, $p\mapsto(\partial/\partial y)_p$, $p\mapsto(\partial/\partial z)_p$ は $\mathbb{R}^3$ 上の枠である.

まず, ベクトル場の C^∞ 級性と同値な命題を扱う.
ベクトル場 $F:X\to TX$ が C^∞ 級写像であることと (X の座標近傍 U に対して) $F=\sum a_i(\partial/\partial x_i)$ を満たす $a_i:U\to\mathbb{R}$ が C^∞ 級関数であることとは同値である.

(必要性) U 上の局所座標系を ϕ とすれば, TX の座標近傍 $(TU,\bar{\phi})=(TU;\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n,c_1,\cdots,c_n)$ に対して $F(p)=\sum c_i(F(p))(\partial/\partial x_i)_p$ であるから $a_i=c_i\circ F$ であり $c_i:TU\to\mathbb{R}$ は座標であるから C^∞ 級関数である.
(十分性)

ここで, $f\in C^\infty(X)$ に対して $(Ff)(p)\equiv F(p)f$ で定義された $Ff\in C^\infty(X)$ を対応させる写像は X における導分であるから, ベクトル場は X における導分を与える. (実際, これは $C^\infty(X)$ の間の線形写像であるし, 各点で Leibniz 則を満たす.)[*47]
また, ベクトル場 $F:X\to TX$ が C^∞ 級写像であることと, C^∞ 級関数 $f:X\to\mathbb{R}$ に対して $Ff:X\to\mathbb{R}$ が C^∞ 級関数であることとは同値である.

(必要性) X の座標近傍 (U,ϕ) において $F=\sum a_i(\partial/\partial x_i)$ を満たす $a_i:U\to\mathbb{R}$ は C^∞ 級関数であるから, f の C^∞ 級性より Ff は U において C^∞ 級関数である.
(十分性) X の座標近傍 (U,ϕ) において $F=\sum a_i(\partial/\partial x_i)$ であるとすれば, $x_i:U\to\mathbb{R}$ が $p\in U$ のある近傍 V で一致するような C^∞ 級関数 $\bar{x}_i:X\to\mathbb{R}$ が存在するから, V において $F\bar{x}_k=(\sum a_i(\partial/\partial x_i))\bar{x}_k=a_k$ であることから a_k は C^∞ 級関数であり F は C^∞ 級写像である.

C^∞ 級関数の定義域の拡張のように, $p\in X$ の近傍 U で定義された C^∞ 級ベクトル場 $F:U\to TU$ に対して, p の近傍 $V(\subset U)$ で F と一致するような X 上の C^∞ 級ベクトル場 $\bar{F}:X\to TX$ が存在する.

p の近傍 V で常に 1 を掃き出すような U を台とする C^∞ 級隆起関数 $\rho:X\to\mathbb{R}$ が存在するから, $\bar{F}(x)\equiv\rho(x)F(x)\ (x\in U),\ 0\ (x\notin U)$ で定義される $\bar{F}$ は (C^∞ 級関数の場合と同様に) C^∞ 級ベクトル場であることが示される.

◇ 積分曲線と局所フロー

C^∞ 級ベクトル場 $F:X\to TX$ に対して $c'(t)=F(c(t))$ を満たす C^∞ 級曲線 $c:(a,b)\to X$ を F の積分曲線 (integral curve) と呼ぶ.
((a,b) が 0 を含むとき $c(0)=p$ であるならば $p\in X$ を積分曲線の始点と呼ぶ.)
また, 定義域をより大きな区間に拡張することができない積分曲線を極大積分曲線 (maximal integral curve) と呼ぶ.

(例)・$F(x,y)\equiv(-y,x)$ で定義されるベクトル場 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ の (x_0,y_0) を始点とする積分曲線は $c(t)=(x_0\cos t-y_0\sin t, x_0\sin t+y_0\cos t)$ であるから, 積分曲線は半径 $(x_0^2+y_0^2)^{1/2}$ の円である.
ここで始点に対して $c(t)$ を掃き出す $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ は微分同相写像であり, その逆写像は $c(-t)$ を掃き出す写像である.
多様体 X からそれ自身への微分同相写像全体の集合で群であるもの $\mathrm{Diff}(X)$ に対して, 準同型写像 $c:\mathbb{R}\to\mathrm{Diff}(X)$ を X の微分同相写像の 1 パラメーター部分群 (one-parameter group) と呼ぶ.
したがって, 前述のベクトル場の積分曲線は $\mathbb{R}^2$ の微分同相写像の 1 パラメーター部分群を与える.
・$F(x)\equiv x^2$ で定義されるベクトル場 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の $x=2$ を始点とする積分曲線は $x(t)=2/(1-2t)$ であるから, (0 を含む) 極大積分曲線の区間は $(-\infty,1/2)$ である.

一般に C^∞ 級ベクトル場 $F:X\to TX$ に対して $p\in X$ を始点とする積分曲線を考える.
まず, p を含む座標近傍 (U,ϕ) に対して $F(c(t))=\sum a_i(c(t))(\partial/\partial x_i)_{c(t)}$ であるとすれば $c'(t)=\sum dc_i/dt(t)(\partial/\partial x_i)_{c(t)}\ (c_i\equiv x_i\circ c)$ であるから積分曲線は連立常微分方程式 $dc_i/dt(t)=a_i(c(t))\ (c_i(0)=p_i)$ を満たす.
したがって, X の座標近傍 (U,ϕ) 上の C^∞ 級ベクトル場 $F:U\to TU$ と $p\in U$ に対して, $G(t,q)\ (q\in U')$ が q を始点とする F の積分曲線であるような p の近傍 $U'(\subset U)$ と C^∞ 級関数 $G:(-\varepsilon,\varepsilon)\times U'\to U$ が存在する.[*48]
このときの G をベクトル場 F で生成される局所フロー (local flow) と呼び, $q\in U'$ を指定したものを q に関するフロー曲線 (flow line) と呼ぶ.
また, 定義域が $\mathbb{R}\times X$ である局所フローを大域フロー (global flow) と呼び, 大域フローをもつベクトル場を完備ベクトル場 (complete vector field) と呼ぶ.

以降, $G(t,q)$ を $G_t(q)$ と表記する.
$t+t'\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ を満たす $t,t'\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ に対して $G_t(G_0(q))=G_t(q)$ であるから積分曲線の一意性より $G_t(G_{t'}(q))=G_{t+t'}(q)$ である.
したがって大域フロー G に対して $G_t\circ G_{-t}=G_{-t}\circ G_t=G_0=id_X$ であるから $G_t:X\to X$ は微分同相写像である. (すなわち X 上の大域フローは X の微分同相写像の 1 パラメーター部分群を与える.)

ベクトル場 $F:U\to TU$ の局所フロー $G(t,q)$ に対して $\partial G/\partial t(0,q)=F(G(0,q))=F(q)$ であるから, ベクトル場を局所フローから再構成することができる.
(例)・$G(t,(x,y))\equiv(x\cos t-y\sin t, x\sin t+y\cos t)$ で定義される $G:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ はベクトル場 $F(x,y)=(-y,x)$ で生成される大域フローである.[*49]

[*46] ベクトル場 $F:\mathbb{R}^2\to T\mathbb{R}^2$ に対して $G(x,y)\equiv(-y,x)$ で $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を定義すれば, $-y(\partial/\partial x)_{(x,y)}+x(\partial/\partial y)_{(x,y)}\in\mathrm{Im}F$ に対して $(-y,x)\in\mathrm{Im}G$ を掃き出す写像は全単射であるから, F と G を自然に同一視することができる.
接ベクトル空間の場合と同様に, Euclid 空間上のベクトル解析におけるベクトル場は後者である.
[*47] Ff の掃き出す値が f の局所座標表示の偏微分係数であることに注意されたい.
[*48] すなわち $G(0,q)=q$ である.
[*49] Euclid 空間上であるから速度ベクトルとベクトル場を全単射を通じて対応させていることに留意されたい.

◇ Lie 括弧積と Lie 代数

X の開集合 U 上の C^∞ 級ベクトル場 F, F' を U における導分と同一視すれば, $FF'\colon C^\infty(U)\to C^\infty(U)$ は線形写像の合成写像であるから線形写像であるが, $FF'(\phi\psi)=F((F'\phi)\psi+\phi(F'\psi))=(FF'\phi)\psi+(F'\phi)(F\psi)+(F\phi)(F'\psi)+\phi(FF'\psi)$ よりこれは導分ではない.
したがって, $p\in U$ における Lie 括弧積 (Lie bracket) を $[F,F']_p(\phi)\equiv(F(p)F'-F'(p)F)\phi$ で定義すればこれは p における点導分である.
これを U 上に拡張したものをベクトル場 (から同一視される導分) の Lie 括弧積 (Lie bracket) と呼ぶ.

ここで, C^∞ 級ベクトル場の Lie 括弧積は C^∞ 級ベクトル場であるから, Lie 括弧積は X 上の C^∞ 級ベクトル場全体の集合 (線形空間) $L(X)$ における演算である.[*50]
また, 以下が成り立つ.
1) $[F,F']=-[F',F]$ 2) $[F,[F',F'']]+[F',[F'',F]]+[F'',[F,F']]=0$ (Jacobi 恒等律)

これは以下のように一般化される.
以下を満たす演算 $[\ ,\ ]\colon V\times V\to V$ が定義された K 上の線形空間 V を K 上の Lie 代数 (Lie algebra) と呼ぶ.[*51]
1) 双線形性 : $[ax+by,z]=a[x,z]+b[y,z],\ [z,ax+by]=a[z,x]+b[z,y]$ 2) 交代性 : $[x,y]=-[y,x]$
3) Jacobi 恒等律 : $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0\ \ (x,y,z\in V,\ a,b\in K)$
また, $D[x,y]=[Dx,y]+[x,Dy]$ を満たす線形写像 $D\colon V\to V$ を K 上の Lie 代数 V の導分 (derivation) と呼ぶ.

(例)・線形空間 V に対して $[x,y]=0\ (x,y\in V)$ で演算を定めれば V は Lie 代数であり, これを可換 Lie 代数と呼ぶ.
・多様体 X の C^∞ 級ベクトル場全体の集合 $L(X)$ は, Lie 括弧積を演算とすれば Lie 代数である.
・$A,B\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ に対して $[A,B]\equiv AB-BA$ で演算を定めれば $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ は Lie 代数である.
・K 上の Lie 代数 V に対して, $\mathrm{ad}_x(y)\equiv[x,y]$ で定義される $\mathrm{ad}_x\colon V\to V$ は演算の Jacobi 恒等律より V の導分である.

◇ ベクトル場の押し出し

C^∞ 級写像 $f\colon X\to Y$ とベクトル場 $F\colon X\to TX$ に対して, $(df)_p(F(p))\in T_{f(p)}(Y)$ を $F(p)\in T_p(X)$ の押し出し (pushforward) と呼ぶ.
$f(p)=f(q)=y$ であるならば $F(p)$ と $F(q)$ の押し出しは y の接ベクトルであるが, 一般に両者が一致するとは限らない.
ここで f が微分同相写像であるならばその単射性より $((df)(F))(f(p))\equiv(df)_p(F(p))$ が無矛盾に定義されるし, 全射性よりこれの定義域は Y である.
このときの $(df)(F)\colon Y\to TY$ を $F\colon X\to TX$ から押し出されたベクトル場と呼ぶ.

(例)・第1成分への射影 $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ に対してベクトル場 $F\colon\mathbb{R}\to T\mathbb{R}^2$ を押し出すことはできない.

C^∞ 級写像 $f\colon X\to Y$ とベクトル場 $F\colon X\to TX$ に対して, すべての $p\in X$ に対して $(df)_p(F(p))=\bar{F}(f(p))$ が成り立つような $\bar{F}\colon Y\to TY$ を f 関係にあるベクトル場と呼ぶ.[*52]

(例)・$f\colon X\to Y$ が微分同相写像であるならば, $F\colon X\to TX$ から押し出された $(df)_p(F)\colon Y\to TY$ は f 関係にあるベクトル場である.

また, C^∞ 級写像 $f\colon X\to Y$ とベクトル場 $F\colon X\to TX$ と $\bar{F}\colon Y\to TY$ に対して, F と $\bar{F}$ が f 関係にあるベクトル場であることと, C^∞ 級関数 $g\colon Y\to\mathbb{R}$ に対して $F(g\circ f)=(\bar{F}g)\circ f$ であることとは同値である.

(必要性) $g\colon Y\to\mathbb{R}$ と $p\in X$ に対して $(df)_p(F(p))g=F(p)(g\circ f)=(F(g\circ f))(p)$ であるし, $\bar{F}(f(p))g=(\bar{F}g)(f(p))$ であるから明らか.
(十分性) 前述の証明を逆に辿ればよい.

よって C^∞ 級写像 $f\colon X\to Y$ に対して, C^∞ 級ベクトル場 $F\colon X\to TX$ が $\bar{F}\colon Y\to TY$ と f 関係にあり, $G\colon X\to TX$ が $\bar{G}\colon Y\to TY$ と f 関係にあるならば, $[F,G]$ は $[\bar{F},\bar{G}]$ と f 関係にある.

C^∞ 級関数 $g\colon X\to\mathbb{R}$ に対して以下が成り立つ.
$[F,G](g\circ f)=FG(g\circ f)-GF(g\circ f)=F((\bar{G}g)\circ f)-G((\bar{F}g)\circ f)=(\bar{F}\bar{G}g)\circ f-(\bar{G}\bar{F}g)\circ f=((\bar{F}\bar{G}-\bar{G}\bar{F})g)\circ f=([\bar{F},\bar{G}]g)\circ f$

[*50] X 上の C^∞ 級関数 ϕ に対して $[F,F']\phi$ が C^∞ 級関数であることを示せばよい.
[*51] Lie 代数のことを Lie 環 (Lie ring) と呼ぶ流儀もあるし, 線形空間ではなく単に可換群であることを要請したものを Lie 環と呼ぶ流儀もある.
[*52] すなわち f 関係にあるベクトル場とは, 押し出しとは限らないがなんらかの方法で構成された Y 上のベクトル場である.

♣ 第9章 Lie 群と Lie 代数

◇ Lie 群

群である C^∞ 級多様体で演算と逆元をとる写像が C^∞ 級写像であるものを Lie 群 (Lie group) と呼ぶ.[*53][*54]
ここで, Lie 群 G に対して $l_g(x)\equiv g\cdot x$ で定義される $l_g:G\to G$ を $g\in G$ に関する左乗法と呼び, これは C^∞ 級微分同相写像である.

(例)・Euclid 空間は加法に関して Lie 群である.
・$\mathbb{C}^\times$ は乗法に関して Lie 群である.
・Lie 群の直積は自然な演算に関して Lie 群である.
・一般線形群 $GL_n(\mathbb{R})$ は積の演算に関して Lie 群である.
・特殊線形群 $SL_n(\mathbb{R})$ は積の演算に関して Lie 群である.[*55]
・直交群 $O_n(\mathbb{R})$ が一般線形群 $GL_n(\mathbb{R})$ の部分多様体であることを示すために階数一定等位集合定理を用いたが, $O_n(\mathbb{R})$ の次元を決定するために正則等位集合定理を用いる.

Lie 群 G_1, G_2 に対して群の準同型写像であり C^∞ 級写像である $f:G_1\to G_2$ を Lie 群の準同型写像と呼ぶ.[*56]

以下を満たす $H(\subset G)$ を Lie 部分群 (Lie subgroup) と呼ぶ.[*57]
1) H は部分群である.　2) H は包含写像に関して G のはめ込まれた部分多様体である.　3) H における演算と逆元をとる写像が C^∞ 級写像である.
ここで, $\mu\circ(i\times i):H\times H\to G$ は C^∞ 級写像であるから, G の部分群である部分多様体は G の Lie 部分群である.
したがって, 部分群である部分多様体を埋め込まれた Lie 部分群 (imbedded Lie subgroup) と呼ぶ.

また, 以下が成り立つ. (証明は控える.)
閉部分群定理 : Lie 群の部分群である閉集合は埋め込まれた Lie 部分群である.

(例)・$\mathbb{R}^2$ の原点を通る直線 L はトーラス $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ の Lie 部分群である.
・特殊線形群と直交群は一般線形群の埋め込まれた部分多様体である.

◇ Lie 群の Lie 代数

Lie 群 G における $g\in G$ に関する左乗法 $l_g:G\to G$ は微分同相写像であるから, 微分 $(dl_g)_e:T_e(G)\to T_g(G)$ は同型写像である.
したがって, 単位元における接ベクトル空間の性質から任意の元における接ベクトル空間の性質が定まる.

Lie 群上のベクトル場 $F:G\to TG$ に対して左乗法に関する押し出し $(dl_g)(F):G\to TG$ が定義され, これが自身と一致するようなベクトル場を左不変ベクトル場 (left constant vector field) と呼ぶ.[*58]
ここで, $F(g)=((dl_g)(F))(g)=(dl_g)_e(F(e))$ であるから, 左不変ベクトル場は単位元に対して掃き出す値のみで定まる.
逆に, $v\in T_e(G)$ に対してベクトル場 $F:G\to TG$ を $F(g)\equiv(dl_g)_e(v)$ で構成することができ, 合成関数の微分法より $((dl_g)(F))(gh)=(dl_g)_h(F(h))=(dl_g)_h((dl_h)_e(v))=d(l_g\circ l_h)_e(v)=(dl_{gh})_e(v)=F(gh)$ $(h\in G)$ であるからこれは左不変ベクトル場である.
これを $v\in T_e(G)$ によって生成される左不変ベクトル場と呼ぶ.

G 上の左不変ベクトル場全体の集合 $L(G)$ は自然な演算に関して線形空間である.
ここで, $F\in L(G)$ に対して $F(e)\in T_e(G)$ を掃き出す線形写像と, $v\in T_e(G)$ に対してそれが生成する左不変ベクトル場を掃き出す線形写像は互いに逆写像であるから, $L(G)$ と $T_e(G)$ は同型である.[*59]

ここで, Lie 群上の左不変ベクトル場は C^∞ 級写像である. したがって, $L(G)$ は G 上の C^∞ 級ベクトル場全体の集合の部分線形空間である.

以下を満たす演算 $[\ ,\ ]:V\times V\to V$ が定義された K 上の線形空間 V を K 上の Lie 代数 (Lie algebra) と呼ぶ.
1) 双線形性 : $[ax+by,z]=a[x,z]+b[y,z]$, $[z,ax+by]=a[z,x]+b[z,y]$　2) 交代性 : $[x,y]=-[y,x]$
3) Jacobi 恒等律 : $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$ $(x,y,z\in V,\ a,b\in K)$
ここで, Lie 代数の部分線形空間である Lie 代数を Lie 部分代数 (Lie subalgebra) と呼ぶ.[*60]

(例)・Lie 群 G 上の左不変ベクトル場全体の集合 $L(G)$ において Lie 括弧積は閉じた演算であるから, これは G 上の C^∞ 級ベクトル場全体の集合の Lie 部分代数である.[*61]

ここで, $v,w\in T_e(G)$ に対して同型写像 φ が掃き出す元を $V,W\in L(G)$ とすれば, $[v,w]\equiv\varphi^{-1}([V,W])=[V,W](e)$ で定義される Lie 括弧積に関して $T_e(G)$ は Lie 代数である.
これを Lie 群 G の Lie 代数 (Lie algebra on Lie group) と呼ぶ.[*62]

[*53] 群で頻繁に扱う操作を多様体上で扱う際に便利であるように, 演算と逆元をとる写像が C^∞ 級写像であることを要請している.
[*54] ちなみに, 群である位相空間で演算と逆元をとる写像が連続写像であるものを位相群 (topological group) と呼ぶ.
[*55] $SL_n(\mathbb{C})$ も同様に示される.
[*56] Lie 群を対象とすればその間の準同型写像は射であるから, これらは圏である.
[*57] Lie 部分群ははめ込まれた部分多様体であるから, 相対位相をもつ必要はない.
[*58] すなわち, 左不変ベクトル場 G はそれ自身と $l_g(g\in G)$ 関係にある.
[*59] すなわち, Lie 群においては任意の元の接ベクトル空間の性質が, 左不変ベクトル場全体の集合から定まる.
[*60] すなわち, Lie 代数の部分線形空間で演算が閉じているものである.
[*61] $F\in L(G)$ と $F'\in L(G)$ が自身と l_g 関係にあるならば, $[F,F']$ も自身と l_g 関係にあることに注意されたい.
[*62] G の Lie 代数はしばしば $\mathfrak{g}$ で書かれる. (たとえば後述するように一般線形群の Lie 代数は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ である.)