バナッハ-タルスキーのパラドクス

BV18077 森田 泰成

2020 年 11 月 17 日

1　はじめに

前回, 選択公理について学習を進めたので, その続きである. 選択公理を認めた先にある我々の認識では理解しがたいパラドクスを簡単に紹介する.

2　バナッハ-タルスキ-のパラドクス

定義 2.1　3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合 A と B が平行移動と回転で互いに移りあう時, A, B は合同であるといい, このとき $A \equiv B$ で表す. また, $\mathbb{R}^3$ の 2 点 $p = (p_1, p_2, p_3)$ と $q = (q_1, q_2, q_3)$ の間の距離を

$$d(p,q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}$$

で表す. $\mathbb{R}^3$ の点 $p = (p_1, p_2, p_3)$ と正の実数 $r > 0$ に対して, p を中心とする半径 r の球を記号で $\bar{B}(p;r)$ で表すことにする. すなわち

$$\bar{B}(p;r) = \{x \in \mathbb{R}^3 | d(x,p) < r\}$$

選択公理

定理 2.1　集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ が空集合を含んでいないならば, 集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ に属する各集合 A_i から 1 つずつ要素を選ぶことができる.

バナッハ-タルスキーのパラドクス

定理 2.2　選択公理を仮定する. このとき, $\bar{B}(p;r)$, $\bar{B}(p';r')$ を任意の 2 つの球とする. このとき, $\bar{B}(p,r)$, $\bar{B}(p';r')$ は次のような共通点のない同数の有限個の和集合 (直和) として表せる.

$$\begin{aligned} \bar{B}(p;r) &= A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n \\ \bar{B}(p',r') &= B_1 \sqcup B_2 \sqcup \cdots \sqcup B_n \\ A_i &\equiv B_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

この主張は言い換えると, 大きさの異なる 2 つの球は, 有限個の要素に分解ができる. その構成要素が同じである. ということとなる. すなわち, 半径 1 の球を分解して半径 100 の球ができると述べている. $\bar{B}(p;r) = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n$ は交わりのない集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ の和集合なので,

$$\bar{B}(p,r) \text{ の体積} = (A_1\text{の体積}) + (A_2\text{の体積}) + \cdots + (A_n\text{の体積})$$

となっているはずである. また, $B_1, B_2, \cdots, B_n$ は $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に合同であるから体積もそれぞれ等しい. 従って

$$\begin{aligned} \bar{B}(p,r) \text{ の体積} &= (A_1\text{の体積}) + (A_2\text{の体積}) + \cdots + (A_n\text{の体積}) \\ &= (B_1\text{の体積}) + (B_2\text{の体積}) + \cdots + (B_n\text{の体積}) \\ &= \bar{B}(p',r') \end{aligned}$$

となっているべきである. しかし, $r \neq r'$ のときは起こりえない. この議論では, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ や $B_1, B_2, \cdots, B_n$ に体積があるということが間違いであり, これらの中に体積の測れないものが存在して

いるため, このようなことが起こってしまう. *1

3　選択公理を認めること

式で表すと矛盾が生じていないが, 実際に構成するものを提示することはできない. 存在が証明できても構成することができないような事実を認めて議論することを「選択公理を仮定する」とよぶ.

参考文献

[1] 福田拓生著, 集合とへの入門 [無限をかいま見る], 培風館, 2012 年
[2] 志賀浩二著, 集合への 30 講, 朝倉書店, 1988 年
[3] 内田伏一著, 集合と位相, 裳華房, 1986 年

*1 この話は測度論へと通づる.