数列の母関数

BV20052　青見 健志

令和 3 年 5 月 28 日

目次

1　研究背景

1年の授業で数列の問題を形式べき級数の計算に対応させて解くことができるということを知り，その形式べき級数という対象に興味を持ったので，具体的な数え上げの問題を考え，この手法を用いて解くことで，考察を深めようと思った．

2　母関数と形式べき級数

定義 2.1. 無限数列 $\{a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ に対して,定まるべき級数

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \quad + a_nx^n + \cdots$$

をもとの無限数列の母関数という． x に数を代入しての収束を考えていないのでこのようなべき級数を形式べき級数という．

定義 2.2. べき級数

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \quad \cdots \quad + a_nx^n + \cdots \\ g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \quad \cdots \quad + b_nx^n + \cdots \\ h(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \quad \cdots \quad + c_nx^n + \cdots \end{aligned}$$

に対し、

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 + \cdots \quad + (a_n + b_n)x^n +$$
$$f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_2)x^2 + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0)x^n +$$

として和と積を多項式の時と同様に定める．

このとき、多項式の和と積と同様に、形式べき級数の和と積に関しても結合法則、交換法則、分配法則は成り立つ。

例 2.3.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \\ g(x) &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^nx^n + \cdots \\ h(x) &= 1 - x \end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
f(x)^2 &= 1\cdot 1 + (1\cdot 1 + 1\cdot 1)x + (1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1)x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots \\
f(x)g(x) &= 1 + (1\cdot 1 + 1\cdot(-1))x + (1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 1)x^2 + \cdots \\
&= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots \\
g(x) &= 1 + (1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1)x + (1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1)x^2 + \cdots \\
&= 1 - 2x + 3x^3 - \cdots + (-1)^(n+1)(n+1)x^n + \cdots \\
h(x)f(x) &= 1 + (1-1)x + (1-1)x^2 + \cdots \\
&= 1
\end{aligned}$$

定理 2.4.

- $f(x)g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \vee g(x) = 0$
- $f(x) \neq 0$ のとき $f(x)g(x) = 1$ となる形式べき級数 $g(x)$ を $f^{-1}(x)$ あるいは $\frac{1}{f(x)}$ と表す．また，$f(x)r(x) = h(x)$ を満たす $r(x)$ を $r(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$ と表す.

例 2.5. 例 0.3. で $(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots) = 1$ を示した．すなわち

$$\frac{1}{1-x} = (1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots)$$

と記述できる.

例 2.6. $f(x) = 1+2x+2x^2+2x^3+2x^4+\cdots$ に対して, $\frac{1}{f(x)} = b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\quad\cdots$ を計算すると,

$$(1+2x+2x^2+2x^3+2x^4+\cdots)(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\quad\cdots) = 1$$

であるから、

$$\begin{aligned}
b_1 + 2 &= 0 \\
b_2 + 2b_1 + 2 &= 0 \\
b_3 + 2b_2 + 2b_1 + 2 &= 0 \\
\cdots \\
b_n + 2(b_{n-1} + b_{n-2} + \cdots + b_1 + 1) &= 0
\end{aligned}$$

である．これより，$b_n = -b_{n-1}$ という漸化式が得られ，さらに $b_1 = 2$ であるから

$$b_n = 2(-1)^n$$

が得られる．すなわち,

$$\frac{1}{1+2x+2x^2+2x^3+\cdots} = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + \cdots$$

定理 2.7. $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$，$k(x)$ を形式べき級数とする．$f(x) \neq 0$，$g(x) \neq 0$ ならば

$$\frac{h(x)}{f(x)} = \frac{h(x)g(x)}{f(x)g(x)} \tag{1}$$

$$\frac{k(x)}{f(x)} \cdot \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{k(x)h(x)}{f(x)g(x)} \tag{2}$$

$$\frac{k(x)}{f(x)} + \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{g(x)k(x) + f(x)h(x)}{f(x)g(x)} \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

が成り立つ．

例 2.8.

$$f(x) = 1 + x + x^3 + x^4 + x^6 + x^7 + x^9 + x^10 + \cdots$$

に対して，$(1-x)f(x)$ および $\frac{1}{f(x)}$ を考える．

$$\begin{aligned}
(1-x)f(x) &= (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(x^{3n} + x^{3n+1}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(1-x)(x^{3n} + x^{3n+1}) \text{ (分配法則)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(x^{3n} - x^{3n+2}) \\
&= 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^8 + \cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1-x)f(x) &= (1-x^2)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots) \\
f(x) &= (1+x)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots) \\
\frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{(1+x)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)} \\
\frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{(1+x)\frac{1}{1-x^3}} \\
\frac{1}{f(x)} &= \frac{1-x^3}{1+x} \\
\frac{1}{f(x)} &= (1-x^3)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots) \\
\frac{1}{f(x)} &= (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots) - (x^3 - x^4 + x^5 + \cdots) \\
\frac{1}{f(x)} &= 1 - x + x^2 - 2x^3 + 2x^4 - 2x^5 + \cdots
\end{aligned}$$

定義 2.9. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ のとき，

$$f'(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \cdots$$

と形式微分を定義する．また，$f'(x)$ は $\frac{d}{dx}f(x)$ と表記しても良い．

定理 2.10. $f(x)$，$g(x)$ を形式べき級数とすると，多項式の微分と同様に

$$f'(x) = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = 0 \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{f(x)^2} \tag{7}$$

が成り立つ．ただし，(7) においては $f(x) \neq 0$

定義 2.11. $f(x)$，$h(x)$ は形式べき級数で，$h(x) \neq 0$ とする．

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,\ h(x) = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$$

に対し，

$$f(h(x)) = a_0 + a_1(b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots) + a_2(b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots)^2$$

によって形式べき級数の代入 $f(h(x))$ が定義される．また，$f(h(x))$ を $(f \circ h)(x)$ と記述しても良い．

定理 2.12. $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ は形式べき級数で，$h(x) \neq 0$ とすると，次が成り立つ．

$$(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h \tag{8}$$

$$(f \cdot g) \circ h = (f \circ h)(g \circ h) \tag{9}$$

$$\frac{d}{dx}(f \circ h) = (f' \circ h) \cdot h' \tag{10}$$

例 2.13. $n \in \mathbb{N}$ とするとき，

$$\frac{1 - x^n}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}$$

である．実際，

$$\begin{aligned}
\frac{1 - x^n}{1 - x} &= (1 - x^n)\frac{1}{1 - x} \\
&= (1 - x^n)(1 + x + x^2 * x^3 + \cdots) \\
&= (1 + x + x^2 * x^3 + \cdots) - (x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots) \\
&= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}
\end{aligned}$$

例 2.14. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ の x を $-x$ に置き換えると（代入）

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots$$

となり,

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$$

また,

$$\begin{aligned}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^2 &= (\frac{1}{1-x})^2 \\ &= \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} \\ &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)' \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots\end{aligned}$$

であるから，$(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots)^2$ は $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^2$ の x を $-x$ で置き換えればよく,

$$(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots)^2 = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \cdots$$

例 2.15. $f(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ のとき，$g(x) = -(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots)$ とおくと,

$$f(x) = 1 - g(x)$$

である．よって,

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1-g(x)} = 1 + g(x) + g(x)^2 + g(x)^3 + \cdots$$

例 2.16. (10) で $f(x)$，$h(x)$ をそれぞれ x^m，$f(x)$ に置き換えると,

$$\frac{d}{dx}f(x)^m = mf'(x)f(x)^{m-1} \tag{11}$$

$f(x) \neq 0$ とすると,

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{f^m} = -\frac{mf^{m-1} \cdot f'}{f^{2m}} = -\frac{mf'}{f^{m+1}}$$

となることが，(7)，(1) を使うと分かる．
よって，$f(x) \neq 0$ のときは，(11) が m が負の時も成り立つ．よって,

$$\frac{d}{dx}(1-x)^{-m} = (-m)(-1)(1-x)^{-m-1} = \frac{m}{(1-x)^{m-1}}$$

となる．このことから,

$$\frac{1}{(1-x)^m} = 1 + mx + \frac{m(m+1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!} + \cdots \tag{12}$$

となることを，帰納法によって示すことができる．
実際，$m = 1$ のときは例 0.5. であり，
$m = k$ のとき，上式が正しいと仮定すると，形式微分の定義 (定義 0.9.) より $m = k + 1$ のとき，$\frac{1}{(1-x)^{k+1}}$ の x^n の係数は，$\frac{1}{(1-x)^k}$ の x^{n+1} の係数の $\frac{n+1}{k}$ 倍となり，

$$\frac{n+1}{k} * \frac{(k+(n+1)-1)!}{(k-1)!(n+1)!} = \frac{((k+1)+n-1)}{k!n!}$$

となって，m=k+1 の時も正しい．以上より，式 (12) は全ての自然数 n について成り立つ．

x に cx^l を代入した合成関数を考えれば,

$$\frac{1}{(1-cx^l)^m} = 1 + mcx^l + \frac{m(m+1)c^2}{2}x^{2l} + \cdots + \frac{(m+n-1)!c^n}{(m-1)!n!}x^{ln} + \cdots (l = 1, 2, 3, \cdots)$$

が得られる．したがって，形式べき級数において，次の等式が成り立つ．

$$\frac{1}{(1-cx^l)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(m+k)}{n!} c^n x^{ln} \tag{13}$$

3 母関数の利用

3.1 自然数の分割の個数の計算

例 3.1. 形式べき級数

$$(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)(1 + x^5 + x^10 + \cdots) \tag{14}$$

を考える．これを展開すると x^n の係数は，$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$ の第 i 項と $1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots$ の第 j 項と $1 + x^5 + x^10 + \cdots$ の第 k 項を選んで積をつくることを考えると，

$$x^{2i} * x^{3j} * x^{5k} = x^n \quad \Leftrightarrow 2i + 3j + 5k = n$$

を満たすような (i, j, k) の組の選び方の総数である。

すなわち，形式べき級数 (14) は自然数 n を $2, 5, 3$ の数字のみを使って和で表す表し方の個数 F_n の母関数になっている．
つまり，

$$F_0 + F_1x + F_2x^2 + \cdots = (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)(1 + x^5 + x^10 + \cdots)$$

である．

これと，第 1 節の形式べき級数の計算規則を利用すると様々な分割の場合の数の問題が解ける．

例 3.2. 2 を高々 5 個，3 を高々 3 個，5 を高々 2 個使った和で n を表す表し方の総数を G_n とすると，その母関数は

$$G_0+G_1x+G_2x^2+\cdots+G_{29}x^{29}=(1+x^2+x^4+\cdots+x^10)(1+x^3+x^6+x^9)(1+x^5+x^10)$$

となる．

例 3.3. 3 人から千円札を集めて全部で n 千円にする．集め方の個数を H_n とおくと，その母関数は

$$\begin{aligned}
H_0+H_1x+H_2x^2+\cdots &= (1+x+x^2+x^3+\cdots)^3\\
&= \frac{1}{(1-x)^3}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(3+k)}{n!}x^n \ (\text{式 (13) より})\\
&= 1+3x+6x^2+10x^3+\cdots
\end{aligned}$$

3 人を m 人にして，n 千円の集め方を ${}_mH_n$ とすると，

$${}_mH_0+{}_mH_1x+{}_mH_2x^2+{}_mH_3x^3+\cdots=\frac{1}{(1-x)^m}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(m+k)}{n!}x^n$$

となる．
${}_mH_n$ を重複組み合わせといい，上の計算から

$${}_mH_n=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(m+k)}{n!}x^n=\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

である．

ここで，各人は千円札を 1 枚出すか出さないかのどちらかであるとする．n 千円の集め方を ${}_mC_n$ 通りとすると

$${}_mC_0+{}_mC_1x+{}_mC_2x^2+\cdots+{}_mC_mx^m$$

${}_mC_n$ を組み合わせといい，上の式から ${}_mC_n$ 二項係数であるから，

$${}_mC_n=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

である．

例 3.4. m 人の中から品物を集めて n 個のものを選ぶ場合の数を考える．
ここで，i 番目の人からの j 個の品物の選び方が $a_{i,j}$ 通りあるとする．
誰から集めたかも区別すると，n 個の品物を得る場合の数 R_n の母関数は,

$$R_0 + R_1x + R_2x^2 + R_3x^3 + \cdots = \prod_{i=1}^{m}(a_{i,0} + a_{i,1}x * a_{i,2}x^2 + a_{i,3}x^3 + \cdots)$$

である．

例 3.5. (問) 赤玉 20 個，白玉 30 個，黒玉 40 個の中から，玉を 50 個選ぶ選び方の総数を求めよ．

(解答)
母関数を使うと，

$$\begin{aligned}
&(1+x+x^2+\cdots+x^{20})(1+x+x^2+\cdots+x^{30})(1+x+x^2+\cdots+x^{40})\\
&= \frac{1-x^{21}}{1-x}\frac{1-x^{31}}{1-x}\frac{1-x^{41}}{1-x}\\
&= (1-x^{21})(1-x^{31})(1-x^{41})(1-x)^{-3}\\
&= (1-x^{21})(1-x^{31})(1-x^{41})(1+\frac{3}{1!}x+\frac{3*4}{2!}+\cdots+\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(3+k)}{n!}x^n+\cdots)
\end{aligned}$$

の x^{50} の係数である．それは,

$$[(1-x^{21})(1-x^{31})(1-x^{41})]_{50} = 1 - x^{21} - x^{31} - x^{41}$$

($[f(x)]_n$ は形式べき級数 f(x) の第 n 項までの多項式)
及び,

$$\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(3+k)}{n!} = \frac{3*4*5*\cdots*(3+n-1)}{n!} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

より,

$$\begin{aligned}
&\frac{\prod_{k=0}^{50-1}(3+k)}{50!} - \frac{\prod_{k=0}^{29-1}(3+k)}{29!} - \frac{\prod_{k=0}^{19-1}(3+k)}{19!} - \frac{\prod_{k=0}^{9-1}(3+k)}{9!}\\
&= \frac{51*52}{2} + \frac{30*31}{2} - \frac{20*21}{2} - \frac{10*11}{2}\\
&= 1326 - 465 - 210 - 55\\
&= 596
\end{aligned}$$

よって，赤玉 20 個，白玉 30 個，黒玉 40 個の中から，玉を 50 個選ぶ選び方の総数は 596 通り．

3.2 定数係数の線形漸化式

3.2.1 多項間漸化式

定数 $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_m$ に対し，$(m+1)$ 項間漸化式

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_3 a_{n-3} + \cdots c_m a_{n-m} \ (n \geq m)$$

を満たす数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ の母関数を $f(x)$ とおくと，

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\
c_1 x f(x) &= c_1 a_0 x + c_1 a_1 x^2 + c_1 a_2 x^3 + c_1 a_3 x^4 + \cdots + c_1 a_{n-1} x^n + \cdots \\
c_2 x^2 f(x) &= c_2 a_0 x^2 + c_2 a_1 x^3 + c_2 a_2 x^4 + c_2 a_3 x^5 + \cdots + c_2 a_{n-2} x^n + \cdots \\
&\vdots \\
c_m x^m f(x) &= c_m a_0 x^m + c_m a_1 x^{1+m} + c_m a_2 x^{2+m} + c_m a_3 x^{3+m} + \cdots + c_m a_{n-m} x^n + \cdots
\end{aligned}$$

であるから，

$$(1-c_1x-\cdots-c_mx^m)f(x) = a_0+(a_1-c_1a_0)x+\cdots+(a_{m-1}-c_1a_{m-2}-\cdots-c_{m-1}q_0)x^{m-1}$$

が得られる．よって，次の定理が成り立つ．

定理 3.6. $(m+1)$ 項間漸化式によって決まる数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ の母関数 $f(x)$ は高々 $(m-1)$ 次の多項式 $h(x)$ によって，

$$f(x) = \frac{h(x)}{1 - c_1 x - c_2 x^2 - \cdots - c_m x^m}$$

と表せることによって特徴づけられる (一意に決まる).

証明. 代数学の基本定理より，$t^m - c_1 t^{m-1} - \cdots - c_{m-1} t - c_m = 0$ の根を α_i とすると，

$$^m - c_1 t^{m-1} - \cdots - c_{m-1} t - c_m = \prod_{i=1}^{l} (t - \alpha_i)^{m_i}$$

と表せるので，

$$1 - c_1 x - c_2 x^2 - \cdots - c_m x^m = \prod_{i=1}^{l} (1 - \alpha_i x)^{m_i}$$

となり，

$$f(x) = \frac{h(x)}{1 - c_1 x - c_2 x^2 - \cdots - c_m x^m} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{i,j}}{(1 - \alpha_i x)^j} \ \text{(部分分数展開)} \tag{15}$$

を満たす $c_{i,j}$ を求めることにより，式 (13) を用いて，a_n を具体的に表すことができる．
(15) の両辺に $(1-\alpha_l x)^{m_l}$ を掛けると，

$$h(x)\prod_{i=1}^{l-1}(1-\alpha_i x)^{-m_i} = \sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{c_{i,j}}{(1-\alpha_i x)^j} + \sum_{j=1}^{m_l-1}\frac{c_{l.j}(1-\alpha_l x)^{m_l}}{(1-\alpha_l x)^j} + c_{l,m_l}$$

$x=\frac{1}{\alpha_l}$ を代入すると，

$$c_{l,m_l} = h(\frac{1}{\alpha_l})\prod_{i=1}^{l-1}(1-\frac{\alpha_i}{\alpha_l})^{-m_i}$$

となることが分かる．そこで，c_{l,m_l} をこの式で定め，

$$g(x) = h(x) - c_{l,m_l}\prod_{i=1}^{l-1}(1-\alpha_i x)^{m_i}$$

とおくと，

$$f(x) = \frac{c_{l,ml}}{(1-\alpha_l x)^{m_l}} + \frac{g(x)}{\prod_{i=1}^{l}(1-\alpha_i x)^{m_i}}$$

となるが，$g(\frac{1}{\alpha})=0$ であるので，

$$g(x) = h_1(x)(1-\alpha_l x)$$

となる $h_1(x)$ が存在し，$h_1(x)$ の次数は高々 $m-2$ である．このとき，

$$f(x) = \frac{c_{l,ml}}{(1-\alpha_l x)^{m_l}} + \frac{h_1(x)}{(1-\alpha_l x)^{m_l-1}\prod_{i=1}^{l-1}(1-\alpha_i x)^{m_i}}$$

となる．
以降，同様なことを最後の項に続けて分母の次数を下げていけば，求める式が得られる． □

この操作によって，部分分数展開の表し方も一意であることがわかる．

例 3.7.

フィボナッチの問題

1 つがいの子ウサギがいる．子ウサギは 1 か月経つと成熟し，さらにもう 1 か月後から毎月 1 つがいの子ウサギを産む．生まれたウサギも同様に 1 か月経つと成熟し，さらにもう 1 か月後から毎月 1 つがいの子ウサギを産む．1 年後のウサギの数は何匹か．

この 1 か月ごとのウサギの数をフィボナッチ数列といい，フィボナッチ数列は

$$a_0 = a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ (n \geq 2)$$

n	nか月後のウサギの数
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233

図 1　ウサギの増え方

で定まる．

フィボナッチ数列の母関数を

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

とおくと，

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ xf(x) &= a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \cdots + a_{n-1} x^n + \cdots \\ x^2 f(x) &= a_0 x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4 + a_3 x^5 + \cdots + a_{n-2} x^n + \cdots \end{aligned}$$

となるので，漸化式より

$$(1 - x - x^2) f(x) = a_0 + (a_1 - a_0)x = 1$$

がわかる．$t^2 - t - 1 = 0$ の 2 根を $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおくと母関数は，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1 - x - x^2} \\ &= \frac{1}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x)} \end{aligned}$$

となり，C_1，C_2 を定数として，

$$\frac{1}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x)} = \frac{C_1}{1 - \alpha x} + \frac{C_2}{1 - \beta x}$$

と表せるので，個の両辺に $(1-\alpha x)$ を掛け，$x=\frac{1}{\alpha}$ を代入することにより，

$$C_1=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}$$

がわかる．このとき，

$$f(x)=\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}=\frac{C_1}{1-\alpha x}+\frac{1-C_1(1-\beta x)}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$$

となり，

$$\begin{aligned}1-C_1(1-\beta x)&=1-\frac{\alpha}{\alpha-\beta}(1-\beta x)\\&=\frac{-\beta+\alpha\beta x}{\alpha-\beta}\\&=\frac{\beta}{\beta-\alpha}(1-\alpha x)\end{aligned}$$

であるから，母関数は，

$$f(x)=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\frac{1}{1-\alpha x}+\frac{\beta}{\beta-\alpha}\frac{1}{1-\beta x}$$

となる．よってフィボナッチ数列の一般項は式 (13) を用いて母関数の第 n 項を求めることにより，

フィボナッチ数列の一般項

$$a_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

となる．一年後のウサギの数はこれに $n=12$ を代入したものとなる．

$$\begin{aligned}&\left|-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right|\\&<\left|-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right|\\&<\left|-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right|\\&\vdots\\&<\left|-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right|\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

であるから，a_n は実数 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$ に最も近い整数である．

また，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\
&= 1.6180\cdots \text{ (黄金比)}
\end{aligned}$$

より，フィボナッチ数列の隣り合った 2 項を割り算した「商」が黄金比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.6180\cdots$ に収束することがわかる．

3.2.2 非斉次関係式

数列 $b_0, b_1, b_2\cdots, a_0, a_1, a_2\cdots$ と定数 $c_1.c_2,\cdots,c_k$ が与えられたとき，漸化式

$$a_n = c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdots+c_ka_{n-k}+b_{n-k}\ (n\geq k) \tag{16}$$

で定まる数列 $a_0, a_1, a_2\cdots$ と b_n の母関数をそれぞれ

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \\
g(x) &= b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots
\end{aligned}$$

とすると，

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k+\cdots+a_nx^n+\cdots \\
c_1xf(x) &= c_1a_0x+c_1a_1x^2+c_1a_2x^3+\cdots+c_1a_{k-1}x^k+\cdots+c_!a_{n-1}x^n+\cdots \\
c_2x^2f(x) &= c_2a_0x^2+c_2a_1x^3+c_2a_2x^4+\cdots+c_2a_{k-2}x^k+\cdots+c_2a_{n-2}x^n+\cdots \\
\vdots c_kx^kf(x) &= c_ka_0x^k++\cdots+a_{n-k}x^n+\cdots \\
x^kg(x) &= b_0x^k+\cdots+b_{n-k}x^n+\cdots
\end{aligned}$$

より，

$$(1-c_1x-c_2x^2-\cdots-c_kx^k)f(x) = a_0+(a_1-c_1a_0)x+\cdots+(a_{k-1}-c_1a_{k-2}-\cdots+c_{k-1}a_0)x^{k-1}+x^kg(x)$$

となる．よって，以下の結果が分かる．

定理 3.8. 漸化式 (16) で定まる数列の母関数は以下で与えられる．

$$f(x) = \frac{e_0+e_1x+\cdots+e_{k-1}x^{k-1}+x^k\sum_{i=0}^{\infty}b_ix^i}{1-c_1x-\cdots-c_kx^k}$$

ただし，$e_0=a_0, e_1=a_1-c_1a_0,\cdots,e_j=a_j-c_1a_{j-1}-\cdots-c_ja_0\ (j=1,2,3,\cdots)$

例 3.9.

ハノイの塔

地面に 3 本の棒 A，B，C が立っていて，A には中心に穴の開いた大きさが互いに異なる円盤が n 枚，大きな円盤の上に小さな円盤という順に重ねられている．1 回の操作で最上部の円盤 1 枚を外して他の棒にはめるとき，全ての円盤を B に移すのに必要な移動の最低階数はいくつか.

という問題を考える.

n 枚の時に必要な最低操作回数を a_n とおく．最大の円盤が A から B に移される直前は，B の棒は空であり，C の棒には最大の円盤以外の $n-1$ 枚の円盤が移されている状態でなければならない．こにょうな状態にする最短手順は a_{n-1} 回であり，最大の円盤を B の棒に 1 回の操作で移した後，最大の円盤以外の $n-1$ 枚の円盤をすべて B の棒に移して求める状態にするために，また a_{n-1} 回操作を行う.

よって全操作回数は

$$a_{n-1}+1+a_{n-1}$$

となる．すなわち，

$$a_n = 2a_{n-1}+1 \ (n \geq 1,\ a_0 = 0) \tag{17}$$

がわかる．数列 $a_0, a_1, a_2 \cdots$ の母関数を

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

とおき，数列 $b_n = 1 \ (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ の母関数を

$$g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

とすると，

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\
2xf(x) &= 2a_0x + 2a_1x^2 + 2a_2x^3 + \cdots + 2a_{n-1}x^n + \cdots \\
xg(x) &= x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots
\end{aligned}$$

であるので，

$$(1-2x)f(x) - xg(x) = a_0 = 0$$

よって，

$$(1-2x)f(x) = xg(x)$$

となる．例 0.5. より，$g(x) = \frac{1}{1-x}$ であるから，

$$(1-2x)f(x) = \frac{x}{1-x}$$

よって，

$$f(x) = \frac{x}{(1-2x)(1-x)} \tag{18}$$

これを定理 2.1. の証明の手順を用いて，部分分数展開すると，

$$f(x) = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$$

となる．よって，公式 (13) より，一般項

$$a_n = 2^n - 1$$

がわかる．

4　改造版フィボナッチ数列の一般項 (最終成果)

数列の母関数を形式べき級数として計算することで，一般項が求められることが分かった．ここでは，実際に自分で数列に関する問題を作成し，この手法を用いて解くことを試みる．

4.1　複雑な漸化式の一般項

フィボナッチの問題をよりバージョンアップさせた次のような問題を考え，導入した形式べき級数の計算を用いて一般項を与えることに成功した．

フィボナッチの問題 (ニワトリバージョン)

最初の 3 か月は毎月 1 つがいの卵（卵 2 個のうち 1 個からオスが孵化し，もう 1 個からメスが孵化するという意味）をもらう．
1 か月経つと卵は孵化しヒヨコになり，さらにもう 1 か月経つと成熟してニワトリになり，さらにもう 1 か月後から毎月 4 つがいの卵（8 個のうち 4 つからオスが孵化し，残りの 4 つからメスが孵化するという意味）を生む．産まれた卵も 1 か月経つと卵は孵化しヒヨコになり，さらにもう 1 か月経つと成熟してニワトリになり，さらにもう 1 か月後から毎月 4 つがいの卵を生む．4 か月後からその月に生まれた卵のつがいを前月より 1 つがい多く別の人に譲ることにした．（4 か月後は 1 つがい，5 か月後は 2 つがい，$\cdots$ と譲る．）ニワトリの増え方はどのようになるか．

n か月後の卵とヒヨコとニワトリの合計を a_n とし，これの一般項を求める．
ある月に生まれるつがいの卵の数は親のニワトリのつがいの数で，それは 3 か月前の卵とヒヨコとニワトリのつがいの数の合計に等しい．生まれた卵のつがいの数の 4 倍からべつの人に譲る卵のつがいの数を差し引いた数だけ前月より卵とヒヨコとニワトリの合計は増えることから，

$$b_0 = -1, b_1 = -2, b_2 = -3, \cdots, b_n = -(n+1), \cdots$$

とすると，以下の漸化式がわかる．

$$a_n = a_{n-1} + 4a_{n-3} + b_{n-3},\ (a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3) \tag{19}$$

数列 $a_0, a_1 a_2, \cdots$ の母関数を

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

とし，数列 $b_0, b_1, b_2, \cdots$ の母関数を

$$g(x) = -1 - 2x - 3x^2 - 4x^3 - \cdots - (n+1)x^n - \cdots$$

とすると，

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\
xf(x) &= a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^n + \cdots \\
4x^3 f(x) &= a_0 x^3 + a_1 x^4 + a_2 x^5 + \cdots + 4a_{n-3} x^n + \cdots \\
x^3 g(x) &= b_0 x^3 + b_1 x^4 + b_2 x^5 + b_3 x^6 + \cdots + b_{n-3} x^n + \cdots
\end{aligned}$$

であるので，漸化式 (19) より

$$(1 - x - 4x^3) f(x) - x^3 g(x) = a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)x^2 - 1 + x +^2$$

となり，

$$f(x) = \frac{1 + x + x^2 + x^3 g(x)}{1 - x - 4x^3}$$

となる．

$$\begin{aligned}
g(x) &= -(1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots) \\
&= -(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots)' \\
&= -\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} \\
&= -\frac{1}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1 + x + x^2 - \frac{x^3}{(1-x)^2}}{1 - x - 4x^3} \\
&= \frac{(1 + x + x^2)(1-x)^2 - x^3}{(1-x)^2(1 - x - 4x^3)} \\
&= \frac{1 - x - 2x^3 + x^4}{(1-x)^2(1 - x - 4x^3)}
\end{aligned}$$

ここで，$t^3 - t^2 - 4 = 0$ の 3 つの根 $2, \frac{-1+\sqrt{7}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{7}i}{2}$ を用いて分母を因数分解すると，

$$\frac{1 - x - 2x^3 + x^4}{(1-x)^2(1-2x)(1 - \frac{-1+\sqrt{7}i}{2}x)(1 - \frac{-1-\sqrt{7}i}{2}x)} \tag{20}$$

となる．これを定理 2.1. の証明の手順を用いて部分分数展開すると，

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{(1-x)^2} &+ \frac{1}{16}\frac{1}{1-x} + \frac{5}{8}\frac{1}{1-2x} \\
&+ \frac{1-\sqrt{7}i}{32}\frac{1}{1-\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}x} + \frac{1+\sqrt{7}i}{32}\frac{1}{1-\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}x}
\end{aligned} \tag{21}
$$

式 (13) より，形式べき級数 $\frac{1}{4}\frac{1}{(1-x)^2}$，$\frac{1}{16}\frac{1}{1-x}$，$\frac{5}{8}\frac{1}{1-2x}$，$\frac{1-\sqrt{7}i}{32}\frac{1}{1-\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}x}$，$\frac{1+\sqrt{7}i}{32}\frac{1}{1-\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}x}$ の x^n の係数は，それぞれ，$\frac{1}{4}(n+1)$，$\frac{1}{16}$，$\frac{5}{8}\cdot 2^n$，$\frac{1-\sqrt{7}i}{32}\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)^n$，$\frac{1+\sqrt{7}i}{32}\cdot\left(\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}\right)^n$ であり，$\{a_n\}$ の母関数である形式べき級数 (21) の x^n の係数つまり a_n の値はこれらをすべて足し合わせたものである．したがって，

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{4}(n+1) + \frac{1}{16} + \frac{5}{8}\cdot 2^n \\
&\quad + \frac{1-\sqrt{7}i}{32}\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)^n + \frac{1+\sqrt{7}i}{32}\cdot\left(\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}\right)^n \\
&= \frac{5}{16} + \frac{1}{4}n + 5\cdot 2^{n-3} \\
&\quad + 2^{-(n+5)}\{(1-\sqrt{7}i)(-1+\sqrt{7}i)^n + (1+\sqrt{7}i)(-1-\sqrt{7}i)^n\}
\end{aligned} \tag{22}
$$

となり，数列 $a_0, a_1.a_2, \cdots$ の一般項 a_n を求めることができた．$n(\geq 2)$ か月後のニワトリのつがいの数は，一番若いニワトリが卵の状態だった $n-2$ か月後の卵とヒヨコとニワトリのつがいの数に等しいので，a_{n-2} $(n \geq 2)$ となる．

n	a(n)
0	1
1	2
2	3
3	6
4	12
5	21
6	41
7	84
8	162
9	319
10	647
11	1286
12	2552

図 2　a_n の増え方

4.2　考察

母関数に対応する形式べき級数を部分分数展開して新たな形式べき級数の和として表し，それぞれの x^n の係数を足し合わせることで数列の一般項を求められることが分かった．つまり，数列の母関数が $\frac{(m-1\text{ 次式})}{(m\text{ 次式})}$ と表される形式べき級数に対応しているとき，その数列は上と同様のプロセスで解くことができる．漸化式 (19) は $(n \geq 3)$ のときにのみ定義できるので，$(n \geq 3)$ を仮定して，漸化式を変形することにより，a_n $(n = 3, 4, 5, 6, \cdots)$ を求め，最後にそれが $n = 0, 1, 2$ のときに成り立つかどうか調べるという手法があるが，母関数は $n = 0.1.2$ のときの情報も含んでいるため，$(n \geq 3)$ という仮定をせずに形式べき級数の計算で直接一般項 a_n $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ が求められることが分かった．これは一つの利点かもしれない．（一般項 (22) に $n = 0, 1, 2$ を代入して $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3$ を調べなくても良い.）

5　今後の課題

今回は「形式べき級数」という新しい概念を導入し，その性質を調べ，数え上げの問題に応用した．今後はここで得られた理解をもとにして，さらに新しい代数学の知識を取り入れつつ，ベルヌーイ数やゼータ関数といった数学的対象を勉強したい.

参考文献

[1] 個数を数える　大島利雄：著　桂利行・栗原将人・堤誉志雄・孵化や賢治：編集　数学書房（2019 年 3 月 10 日).