

# 感染症モデルから COVID-19 を見る

芝浦工業大学 数理科学研究会  
BV19021 青山 知樹

令和3年3月16日

# 目次

1	研究背景	1
2	導入	1
2.1	SIR モデル . . . . .	1
2.2	SEIR モデル . . . . .	4
3	実験	5
3.1	仮定 . . . . .	5
3.2	要件 . . . . .	5
3.3	プログラム . . . . .	5
4	実験結果	7
4.1	SIR モデル . . . . .	7
4.2	SEIR モデル . . . . .	8
5	期待できる効果	10
6	再感染率を考慮した場合	11
6.1	導入と仮説 . . . . .	11
6.2	実験と結果 . . . . .	12
7	今後の課題	14

# 1 研究背景

2020 年は激動の 1 年だったであろう。新型コロナウイルスが猛威を振るった。未だ収束のつかないそしてまだまだ大変な時期にはなるだろう。ここで自分は、COVID-19 が感染症モデルによるとどのくらいの威力があるのか、解析してみたいと興味が湧いた。

## 2 導入

今回は 2 つの有名な感染症モデル、SIR モデルと SEIR モデルを用いる。ここで簡単にモデルについて紹介しておこう。

### 2.1 SIR モデル

#### 2.1.1 仮定

- すべての人が  $S, I, R$  のいずれかに分類される。ちなみに、 $S$  は感受性人口 (感染する可能性のある人口)、 $I$  は感染人口 (感染している、かつ感染させる能力のある人口)、 $R$  は隔離人口 (回復したまたは死亡した人口の合計) であり、これらはすべて時間の関数。
- 感染症以外による人口の増減はないものとする。
- 一度感染すれば免疫を獲得し以降二度とかからないものとする。

#### 2.1.2 SIR モデルの考え方

SIR モデルというのは、ある区域の一人一人が SIR の 3 つの状態うち、どれか一つに必ず属することを前提とした、感染症の数理モデルである。図 1 に SIR モデルの基本的な考え方をまとめた。3 つの状態に分けている人口の増減がこの SIR モデルを用いると、時間変化とともに分かるようになる。



図 1 SIR モデルの考え方

#### 2.1.3 微分方程式

SIR モデルに基づく微分方程式は以下のように書くことが出来る。尚各記号については、図 1 と同じものを使用している。仮定に説明も書いてあるので省略する。

## SIR モデル

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \quad (1)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \quad (2)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \quad (3)$$

この式が意味していることは, 1 式目で感染率 $\beta$ によって, 感染者が増加することで, 非感染者数が減少することを表し, 2 式目で感染者は感染可能性のある人口から隔離人口を引いた数で, 隔離人口は回復率 $\gamma$ の割合で増加することを示している.

### 2.1.4 SIR モデルから言えること

#### 定理 1

SIR モデルによると, 感染初期は, 指数関数的に感染者数で増加する.

証明 .

感染初期 ( $t_1$ ) においては, 感染人口  $I(t_1)$ , 隔離人口  $R(t_1)$  は限りなく少ないことから, 感受性人口  $S(t_1) =$  全人口  $N$  であると近似して考える. そうすると, SIR モデルの二つ目の式について, 以下が成立する.

$$\frac{dI(t_1)}{dt} = \beta N(t_1)I(t_1) - \gamma I(t_1) \quad (4)$$

$N$  は定数より, この式は, 線形化方程式と見なせ, さらに計算可能で, 微分方程式の知識で  $I(t)$  に関する関数式とみて, 積分をすると以下の結果を得る.

$$I(t_1) = Ce^{(\beta N - \gamma)t_1} \text{ (ただし, } C \text{ は積分定数)} \quad (5)$$

この式は, 感染人口  $I(t)$  が感染初期段階において, 指数関数的に増大していることを示していることに他ならない.(証明終了)

また, 定理 1 の証明から以下の定理を述べることが出来る.

#### 定理 2

$$R_0 = \frac{\beta N}{\gamma} \quad (6)$$

この  $R_0$  を **基本再生産数** という. これが 1 未満であれば, 流行せずに, 収束する.

証明 .

$$I(t) = Ce^{(\beta N - \gamma)t} \quad (7)$$

の指数部分  $\beta N - \gamma > 0$  のとき感染症が流行することが分かる. 変形すれば  $R_0 > 1$  が流行条件に

なる.逆に1未満ならば収束することが分かる.(証明終了)

基本再生産数は,一人が感染中に何人へ移すか,その期待値を表す.

定理3

基本再生産数が高くなるほど,かからない人は指数関数的に減少する.

これはどのくらいの人が感染せずに済むのか,重要な定理となってくる.

証明.

流行が完全に終わった状態 ( $I(\infty) = 0$ ) の最終規模  $z = R(\infty)/N$  すなわち,かかった人の割合について考える. SIR モデルの三つ目の式より,

$$I(t) = \frac{dR(t)}{\gamma dt} \quad (8)$$

SIRモデルの一つ目の式に代入すると,

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t) \frac{dR(t)}{\gamma dt} \quad (9)$$

$$\frac{dS(t)}{S(t)dt} = -\frac{\beta dR(t)}{\gamma dt} \quad (10)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{S(t)} = -\frac{\beta}{\gamma} \int_0^\infty dR(t) \quad (11)$$

$$\log S(\infty) - \log S(0) = -\frac{\beta}{\gamma} (R(\infty) - R(0)) \quad (12)$$

このとき,  $S(\infty) = (1-z)N, S(0) \simeq N, R(\infty) = zN, R(0) \simeq 0, R_0 = \frac{\beta N}{\gamma}$  をそれぞれ代入すると,

$$\log((1-z)N) - \log N = -\frac{\beta z N}{\gamma} \Rightarrow 1-z = e^{-z R_0}$$

したがって,かかっている人の割合  $(1-z)$  は,基本再生産数が高いほど指数関数的に減少してしまうことが示せた.(証明終了)

最終的にかからない人数は,

$$\log S(\infty) - \log S(0) = -\frac{\beta}{\gamma} (R(\infty) - R(0)) \quad (13)$$

$$S(0) \simeq N, R(0) \simeq 0 \text{ より,} \quad (14)$$

$$\log \frac{S(\infty)}{N} = -\frac{\beta R(\infty)}{\gamma} \Rightarrow \frac{S(\infty)}{N} = e^{-\frac{\beta R(\infty)}{\gamma}} \quad (15)$$

$$I(\infty) = 0 \text{ より, } S(\infty) + R(\infty) = N \text{ であるから,} \quad (16)$$

$$S(\infty) = N e^{-\frac{\beta(N - S(\infty))}{\gamma}} \quad (17)$$

よって,最終的にかからない人数を求める式が導き出せた.したがって,全人口  $N$  と臨界的な人口密度  $\gamma/\beta$  がわかれば求められる.

## 2.2 SEIR モデル

### 2.2.1 仮定

- 全ての人々が  $S, E, I, R$  のいずれかに分類される.
- 感染症以外による人口の増減が起こらない.
- 一度感染すると、免疫を獲得して、二度とかからない.

### 2.2.2 SEIR モデルの考え方

SEIR モデルというのは、新型コロナウイルスのように潜伏期間が発生するような感染症の流行を予測する上で、有効な感染症の数理モデルになる. 基本的な考え方は、以下の図 2 にてまとめた. 4つの状態に分けている人口の増減がこのSEIR モデルを用いると、時間変化とともに分かるようになる. ここで新しく出てきた  $E$  は潜伏人口 (感染しているが、発症していない人口、または潜伏期間にあり、感染させる能力はない人) を指す.

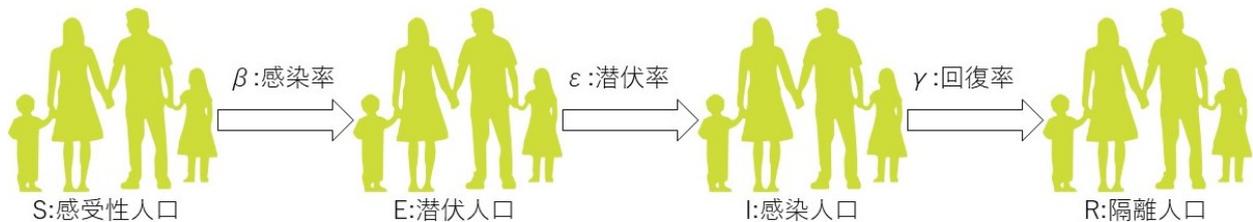


図 2 SEIR モデルの考え方

ちなみに、SIR モデルと違いとしては、SEIR モデルの方がより詳細な予測を立てることが可能になるという点. その理由として、潜伏期間にある人口についても考慮することができるようになるからである.

### 2.2.3 微分方程式

SEIR モデルに基づく微分方程式は以下のように書くことが出来る. 尚各記号については、図 2 と同じものを使用している. 説明は省略する.

SEIR モデル

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \quad (18)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \epsilon E(t) \quad (19)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \epsilon E(t) - \gamma I(t) \quad (20)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \quad (21)$$

※  $\epsilon (> 0)$  は発症率を表す.

(式の意味は SIR モデルと同じように考えることが出来るので省略する.)

## 3 実験

### 3.1 仮定

まず、感染症モデルをシミュレーションするにあたり、幾らかの仮定が必要になってくる。今回は以下の条件のもとでシミュレーションをすることにする。ただし前節で述べた仮定も満たされているとする。

#### 仮定

- $S$ (総人口) は 1 億人とする (大雑把ではあるが、日本の人口を想定)。
- $\gamma$ (回復率) は 0.1 とする。これは発症してから回復するまでに 10 日かかる計算である(データによると COVID-19 は平均 7~14 日とあったので今回はその中央値をとった)。
- $\epsilon$ (発症率) は 0.2 と仮定する。潜伏期間はおよそ 5 日と踏んでこの値にした。
- 感染者の爆発の目処は大体 30 日~60 日の間。これは第一波から第三波までを見て概ねの日数にする。

### 3.2 要件

実際に解析するのは、以下のようなことを目的として幾つか設定して行う。

#### 要件

1. 第一波から第三波までの各波での感染者数は差があるがここでは全て同じ位の人数と仮定 (すなわち、平均した人数と勝手に決める) して、実際の統計データとシミュレーションの差異を比較した場合、爆発する日数は上の仮定の間の期間で行う。
2. 第一波から第三波全体を通して、どのあたりで爆発するのか分析する。この場合は仮定の日数の条件は無視することになるので注意。また 2021 年度 2 月 7 日時点での累計感染者数が大体 40 万人だったのでこの数値で解析する。

以下ではこの要件を番号として用いるので、覚えておいてもらいたい。

### 3.3 プログラム

実際にしようするプログラムは以下。

#### 3.3.1 SIR\_sim.m

```
1 function dy = SIR_sim(t,y);  
2  
3 %-----  
4 %以下の条件をコマンドに入力  
5 % t=[0 200]; //t は時間(日)の区間 (ただし要件 2のときは [0 2000])  
6 % y0=[100000000;1;0]; //y0 は 3 行 1 列で上から S,I,R の初期値代入  
7 % [t,y]=ode45('SIR_sim',t,y0); //積分する関数
```

```

8 % plot(t,y)
9 % legend('S','I','R')
10 %-----
11
12 %要件 1で実装するときはこちらを使用
13 bata=0.0000000045; %感染率  $\beta$  [1/日]
14 ganma=0.1; %回復率  $\gamma$  [1/日]
15 dy=zeros(3,1);
16 dy(1)=-bata*y(1)*y(2);
17 dy(2)=bata*y(1)*y(2)-ganma*y(2);
18 dy(3)=ganma*y(2);
19
20
21 %要件 2で実装するときはこちらを使用
22 bata=0.000000001098; %感染率  $\beta$  [1/日]
23 ganma=0.1; %回復率  $\gamma$  [1/日]
24 dy=zeros(3,1);
25 dy(1)=-bata*y(1)*y(2);
26 dy(2)=bata*y(1)*y(2)-ganma*y(2);
27 dy(3)=ganma*y(2);

```

---

### 3.3.2 SEIR\_sim.m

---

```

1 function dy = SEIR_sim(t,y);
2
3 %-----
4 %以下の条件をコマンドに入力
5 % t=[0 200]; //t は時間(日)の区間 (ただし要件 2のときは [0 2000])
6 % y0=[10000000;1;1;0]; //y0 は 4 行 1 列で上から S,E,I,R の初期値代入
7 % [t,y]=ode45('SIR_sim',t,y0); //積分する関数
8 % plot(t,y)
9 % legend('S','E','I','R')
10 %-----
11
12 %要件 1で実装するときはこちらを使用
13 beta=0.000000013; %感染率  $\beta$  [1/日]
14 ganma=0.1; %回復率  $\gamma$  [1/日] (10日と仮定)
15 ep=0.2; %発症率  $\epsilon$  [1/日] (5日と仮定)
16 dy=zeros(4,1);
17 dy(1)=-beta*y(1)*y(3);
18 dy(2)=beta*y(1)*y(3)-ep*y(2);
19 dy(3)=ep*y(2)-ganma*y(3);
20 dy(4)=ganma*y(3);
21
22
23 %要件 2で実装するときはこちらを使用

```

```

24 beta=0.000000001122; %感染率  $\beta$  [1/日]
25 ganma=0.1; %回復率  $\gamma$  [1/日] (10日と仮定)
26 ep=0.2; %発症率  $\epsilon$  [1/日] (5日と仮定)
27 dy=zeros(4,1);
28 dy(1)=-beta*y(1)*y(3);
29 dy(2)=beta*y(1)*y(3)-ep*y(2);
30 dy(3)=ep*y(2)-ganma*y(3);
31 dy(4)=ganma*y(3);

```

## 4 実験結果

### 4.1 SIR モデル

要件 1 をシミュレーションした結果, 以下のようにになった. このとき, 感染率  $\beta = 4.5 * 10^{-9}$  であった.

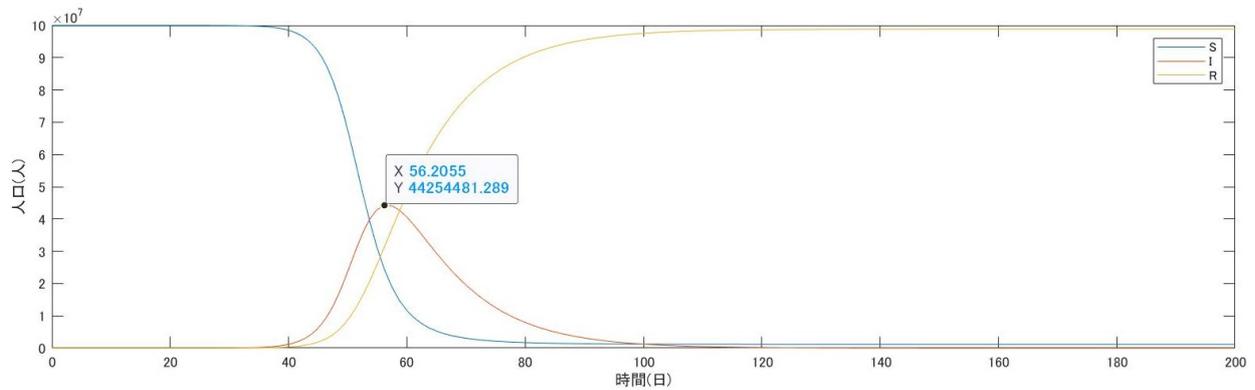


図 3 要件 1 を SIR モデルでシミュレーションした結果

続いて, 要件 2 をシミュレーションした結果, 以下のようにになった. このとき, 感染率  $\beta = 1.098 * 10^{-9}$  であった.

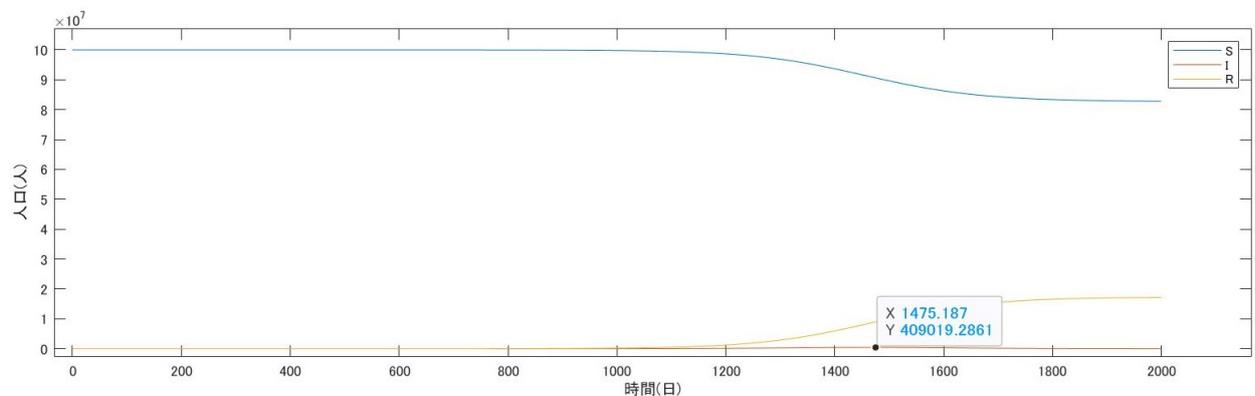


図 4 要件 2 を SIR モデルでシミュレーションした結果

グラフの青色が非感染者数の変化, 赤色が感染人口の変化, 黄色が隔離人口の変化を表す. グラフ

は、仮定をなるべく固定 (日数が 30~60 日の間) できるように、感染率を操作することでグラフがどのようなになるかをシミュレーションした結果である。グラフに書いてある  $X$  軸は日数、 $Y$  軸は人口を表す。

要件 1 からは、感染人口の頂点付近を探ってみると、グラフに点を 1 つ示してあるが、日数が 56 日ほどで感染人口が 4400 万人ほどになっている。実際、第一波から第三波の感染人口の割合を見てみるとここまではいっていない (各波の累計者数でいうと、平均は 13.4 万人くらいである)。現状から言えば、赤い線の山はもっと下で描かれるはずであろう。

しかし、今の感染者数がシミュレーション結果の 10 分の 1 で抑えられているのは外的要因も大きく関わってくる。政府の政策として緊急事態宣言を発動するなどまた個人個人がソーシャルディスタンスを保つなど実施していることを忘れてはならない。

もし、何もせずに日本国民が三密パーティーをすればシミュレーションの結果になることも現実世界体験している皆さんなら分かっていただけの部分もあるのではないだろうか。シミュレーションからは我々に警戒を促す効果や外的要因を考えさせられる部分も学べるであろう。

要件 2 は、累計感染者数 40 万人ほどになるまでにかかる日数をシミュレーションした結果であるが、1475 日 (概ね 4 年) ほどかかることが分かった。現状では 1 年ほど経ってこの数値に至ることから感染割合は急速であることが考察できる。要件 2 で見た場合の非感染者数や隔離人口の変化は 800 万人、200 万人ほどとなっている。また、感染率は要件 1 でみた場合よりも要件 2 で見たほうが 4 分の 1 になっている。

## 4.2 SEIR モデル

要件 1 をシミュレーションした結果、感染人口および潜伏人口は以下のようになった。このとき、感染率  $\beta = 1.3 * 10^{-8}$  であった。

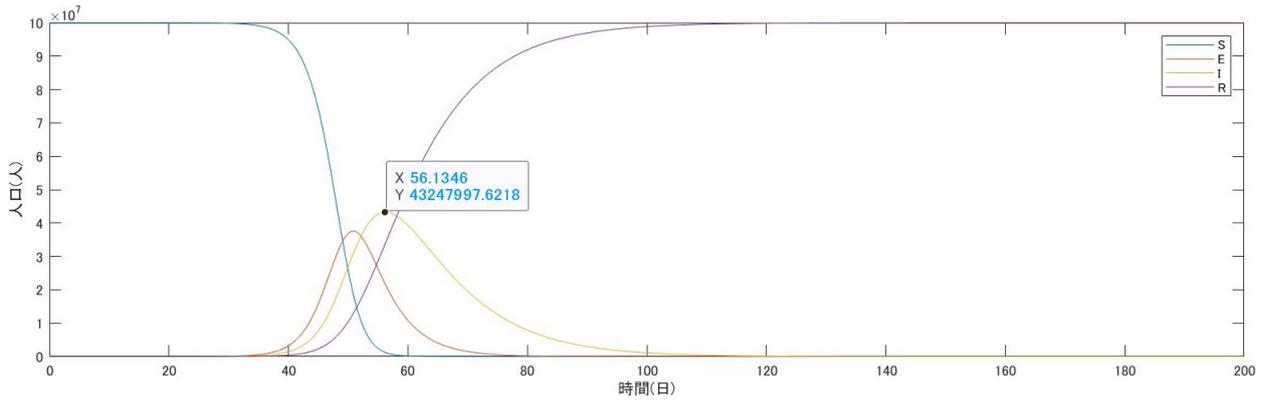


図5 要件1をSEIRモデルでシミュレーションしたときの感染人口

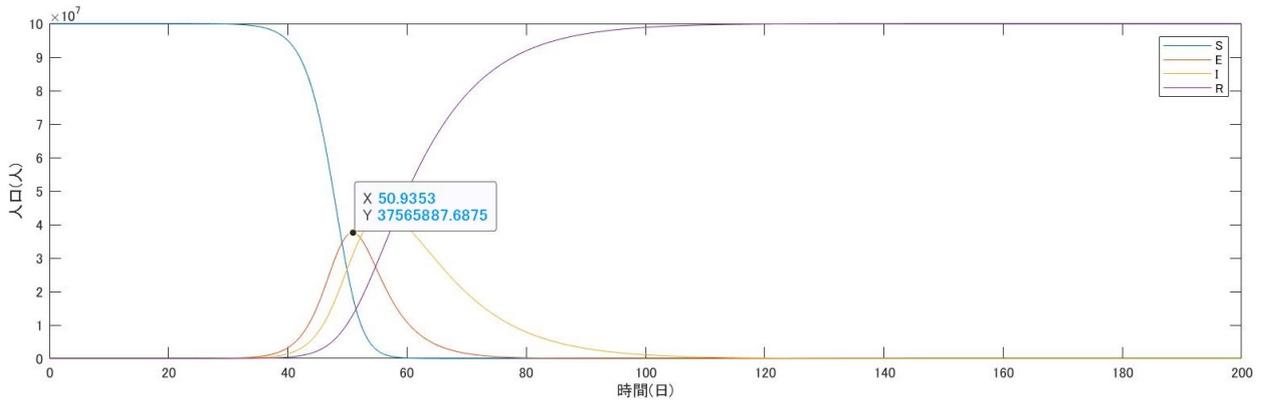


図6 要件1をSEIRモデルでシミュレーションしたときの潜伏人口

続いて、要件2をシミュレーションした結果、以下のようになった。このとき、感染率 $\beta = 1.122 * 10^{-9}$ であった。

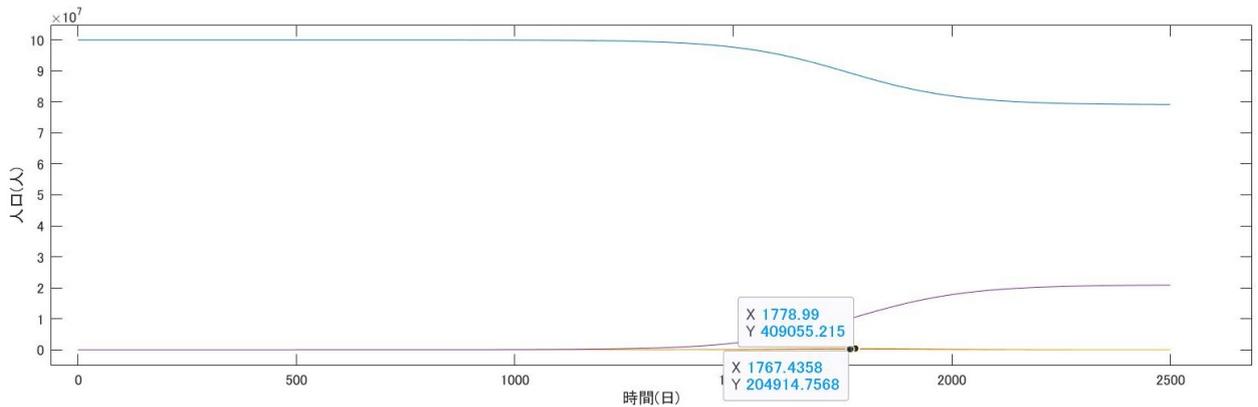


図7 要件2をSIRモデルでシミュレーションした結果

図7において線の色は図6と同じように対応している。要件1でシミュレーションした場合、感染人口は56日経ち、4300万人で潜伏人口は50日経って、約3750万人と出た。一方、要件2では累計感染者40万人ほどになるまでには1778日かかりこのとき潜伏人口は20万人ほど潜在している。SEIRモデルのほうが、SIRモデルに比べると潜伏人口など細かい情報を理解できるので便利である。

## 5 期待できる効果

以下では SEIR モデルを用いて更に深掘りをしていく。例えば、実験結果から、考察として感染症数を減らすには、

- 発症のピークを後ろにずらす (まさに今政府が行っている人との接触を減らす政策に近い)
- 発症率減少 (ワクチン、病院での介護など)

が挙がる。

図5にあったように日数で見た場合、感染者数は莫大な数値になっている事が分かるので発症のピークを後ろにずらす、乃ち、時間を稼ぐとどうなるかを分析してみると、あくまで一例だが以下のようなシミュレーションが得られる。

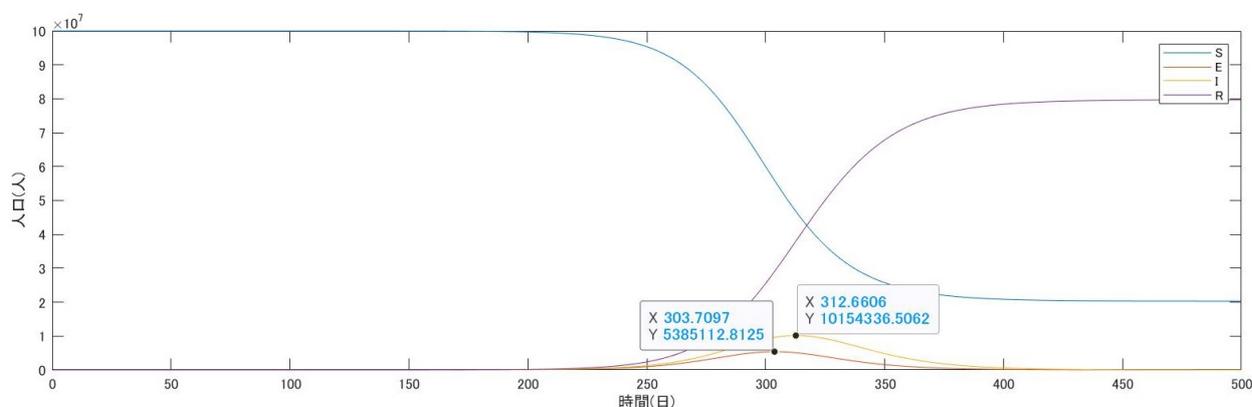


図8 発症ピークを後ろにずらした場合

ここで、鍵になってくるのが基本再生産数である。図5では  $\beta = 1.3 \times 10^{-8}$  であったので公式に代入して、 $R_0 = 13 > 1$  という結果が得られた。ここで、この  $R_0$  を小さくすることを考えて、今の現状で約1年間時間を稼ぐと仮定すれば図8のように、発症ピークを遅めにできるだけでなく、感染症数も減少させることができる。ここでは  $\beta = 2.0 \times 10^{-9}$  で置けば  $R_0 = 2.0 < 13$  になり、だいぶ抑えられていることも検討がつく。また、この稼いだ時間を利用してワクチンの輸入などを進めているのがまさに今なのであろう。

続いて、発症率減少の策としてワクチン導入や病院などの手があるわけだが、ここでは初期値に行動変動を与えることでシミュレーションしてみる。新しく隔離率 (感染人口の一部が確認されて病院搬送や人と隔離される割合)  $T$  を導入する。ここでは隔離率  $T$  を 0.8 で扱う。

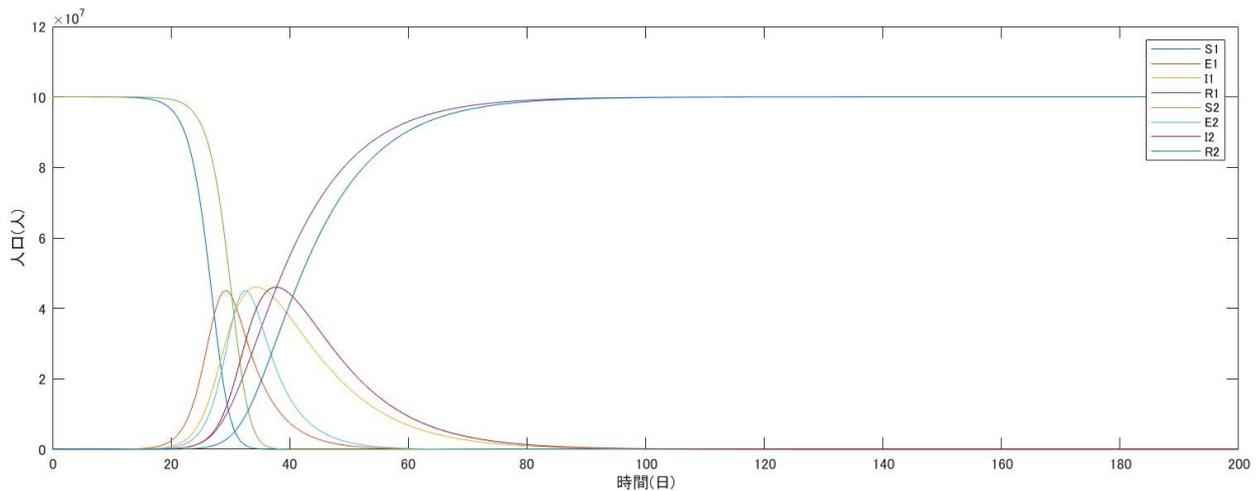


図9 隔離率を導入した場合

大変見づらくて申し訳ないのだが、種類1と種類2で重ねて比較したものを載せている(各ラベルにも1,2とふってある).種類1は初期値  $y_0 = [100000000; 0; 100; 0]$ ; として、種類2では  $y_0 = [100000000; 0; 20; 80]$ ; としてシミュレーションした.つまり始め100人の感染者数があった場合に、8割の80人が隔離された場合(隔離されて手当を受ければ回復されるということになる)の変化を表す.種類1に対して種類2の方が若干ではあるが、日数を稼げているのが分かるだろう.

## 6 再感染率を考慮した場合

### 6.1 導入と仮説

ここでは再感染率を導入して更に細かく分析していくことにしよう. SIRモデルの微分方程式を利用する. 再感染率とは一度感染して回復した人が一定の確率で免疫を失い、再び感染する割合である. これは次に示す式に改良することで計算できる. 再感染率は  $\rho$  で表すことにする.

SIRモデル改良版

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) + \rho R(t) \quad (22)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \quad (23)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \rho R(t) \quad (24)$$

さほど変化はない上、式は理解しやすいものであろう. 回復人口から再感染者が増加して回復人口は減少し、感染人口が増加していく変化式であると考えてくれればよい. 図で示すならば以下のようなになる.



図 10 SIR モデルの考え方改良版

再び SIR モデルで導入した仮定と同じ元で, 再感染率を設定して実験を行う. SIR モデルの仮定は以下のものであった (再掲).

仮定 (再掲)

- $S$ (総人口) は 1 億人とする.
- $\gamma$ (回復率) は 0.1 とする.
- $\epsilon$ (発症率) は 0.2 と仮定する. 潜伏期間はおおよそ 5 日.
- 感染者の爆発の目処は大体 30 日~60 日の間. これは第一波から第三波までを見て概ねの日数にする.

ここに再感染率を以下のように設定した.

仮定 (新規導入)

- 再感染率  $\rho$  は 0.02(2%) とする

## 6.2 実験と結果

プログラムは大きく変わる訳ではないが, 念のために掲載しておく.

```

1 function dy = SIR_sim(t,y);
2
3 %以下の条件をコマンドに入力
4 % t=[0 730]; %t は日数も区間を指す. 最大値を随時変更する(ここでは730日).
5 % y0=[100000000;1;0];
6 % [t,y]=ode45('SIR_sim',t,y0);
7 % plot(t,y)
8 % xlabel('時間(日)')
9 % ylabel('人口(人)')
10 % legend('S','I','R')
11
12 %要件1と要件2でβの値は変わること注意. 日数と累計人口から各々考察していく.
13 bata=%ここの値を操作して求めていく. %感染率β [1/日]
14 ganma=0.1; %回復率γ [1/日]
15 rho=0.02; %再感染率ρ
16 dy=zeros(3,1);

```

```

17 dy(1)=-bata*y(1)*y(2)+rho*y(3);
18 dy(2)=bata*y(1)*y(2)-ganma*y(2);
19 dy(3)=ganma*y(2)-rho*y(3);

```

1ヶ月あまりで感染人口が爆発するときの場合をしてみる.感染率はおおよそ  $5 \times 10^{-9}$  だった.

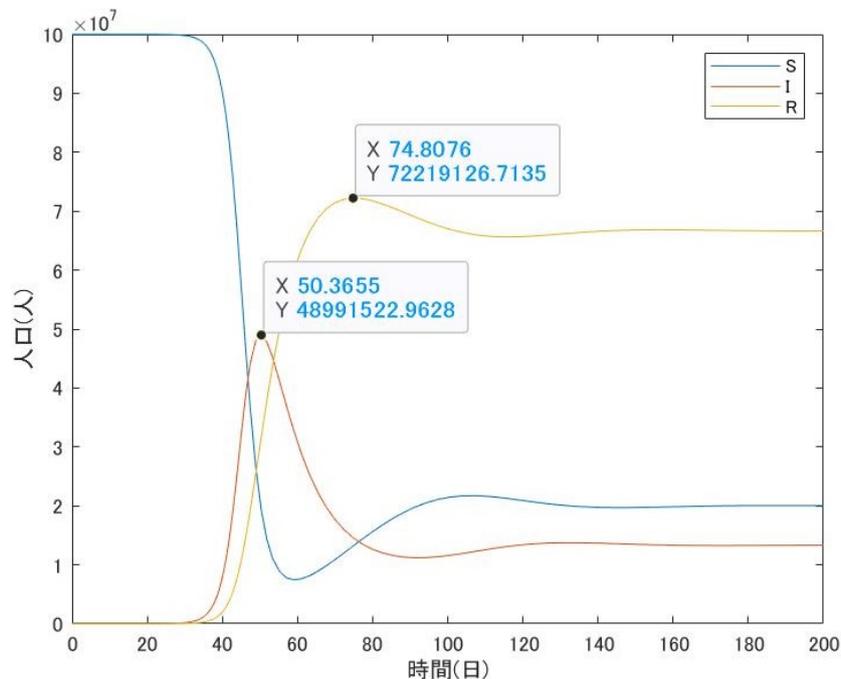


図 11 要件 1 の場合

得られたグラフから読み取れることとして、改良版にしたことで感染までの日数が若干減少し、感染人口が増加している。再感染率があるため早く、多くなったと考えられる。また、こちらが示したグラフでは振動していることが読み取れるだろうか(100日あたりから)。これがいわば、第2波第3波と呼ばれる現象を指し示している。

ちなみに、これを要件2で行った場合、前の実験ではおおよそ4年という感染症のものと分析されたわけであったが、この4年にあわせてみると、

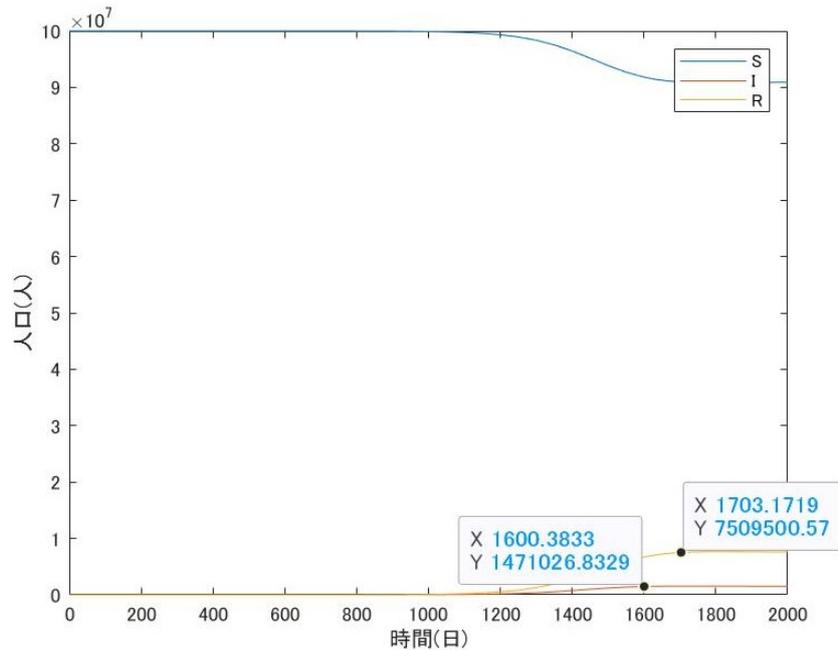


図 12 約 4 年の場合

見ての通り, 改良版の方が, 感染人口が増えているのである. 再感染率があることで感染症状の重さが分かる.

再感染率を導入することで, SIR モデルがより現代の感染状況や動きをより鮮明に映すことが理解できると思う.

## 7 今後の課題

今回は話題の COVID-19 を取り上げて分析してみた. どちらかといえば現状分析に近い形となったが, 未来の予測ができるように細かく研究できればというのが自分の課題であり反省である. 次回はデータ分析を本研究で興味があったので違う形で何か分析してみたいと思う.

## 参考文献

- [1] 【感染症の数理モデル】 SIR モデルとは 分かりやすく説明します  
<https://poruka01.com/sirmodel/>
- [2] 新型コロナウイルス感染症の流行予測 大橋 順 東京大学大学院理学系研究科  
[http://www.bs.s.u-tokyo.ac.jp/content/files/covid/COVID-19\\_SEIRmodel\\_full\\_ver4.1.pdf](http://www.bs.s.u-tokyo.ac.jp/content/files/covid/COVID-19_SEIRmodel_full_ver4.1.pdf)
- [3] [Matlab] 感染症 SIR モデルを解いてみる  
[https://qiita.com/rail\\_tech/items/342cb4ce6a5f5cbb9be6](https://qiita.com/rail_tech/items/342cb4ce6a5f5cbb9be6)
- [4] SEIR モデルとは何か, 分かりやすく解説します  
<https://poruka01.com/seir-model/>
- [5] 新型コロナウイルスの拡散を SEIR モデルでシミュレートする  
<https://qiita.com/moonmile/items/9597ec73b475d5c1fc9b>
- [6] OpenModelica で感染症の数理モデル「SIR モデル」を実装する (死亡率、再感染率を反映する)

<https://qiita.com/nobby-n/items/fec14c16aa40f23bc123>